マスフェスタ

1. 活動時期　2025年8月23日

高校2年　細木 悠音

2. 活動の概要

　大阪府立大手前高校で開催される、数学限定の研究発表会です。全国の高校から生徒が集まってくるほか、関西圏を中心とした大学教授も発表を見に来ます。

3. 感想

 TeXの使い方や数学の発表としてのフォーマルな表現は学びになったと思います。

 また、2名ほど教授とお話しをすることができ、この発表会後の研究の方針を決めるにあたり参考になりました。

 マスフェスタそのものとは少し離れますが印象に残ったエピソードとしては、一緒にいったKくんと新幹線や部屋で数学の問題を解いたり、動画を見たりしたことです。

4. 今後参加する生徒に向けたアドバイス

　数学が好きな人はぜひ参加してみてください(数学科の先生に声をかけてみてください)。こんなことを考える高校生がいるんだと知る良い機会になると思います。

リフル・シャッフルとヒンズー・シャッフルを交互に行ったときの初期配置に戻るまでの回数

市川高等学校 2 年　細木悠音

定義

リフル・シャッフル(R)

上から $1, 2, \cdots, 2n$ と数字が書かれたカードが積まれている山札を上半分Aと下半分Bに分ける. その後, AとBのカードが交互になるようにして一つの束に戻す. このとき, 上下の反転が起こらないようにし, Bの山札の一番上のカードが一番上にくるように戻す.

$$(1,2,3,4,5,6,7,8) \xrightarrow{R} (5,1,6,2,7,3,8,4)$$

Fig. 1 R の前後でのカードの並びの変化($n=4$のとき)

Persi Diaconis らによって, 2^n 枚の山札に対し, $2n$ 回 R を施すことで山札が初期配置に戻ることが知られている.

ヒンズー・シャッフル(H)

上から $1, 2, \cdots, 2n$ と数字が書かれたカードが積まれている山札を上半分Aと下半分Bに分ける. その後, AとBの位置を入れ替える.

$$(1,2,3,4,5,6,7,8) \xrightarrow{H} (5,6,7,8,1,2,3,4)$$

Fig. 2 H の前後でのカードの並びの変化($n=4$のとき)

$2n$ 枚の山札に対し, 2回 H を施すことで山札が初期配置に戻る.

合成シャッフル

Rの後に H を施す合成シャッフルを HR と表す.

$$\underbrace{(1,2,3,4,5,6,7,8) \xrightarrow{R} (5,1,6,2,7,3,8,4) \xrightarrow{H} (7,3,8,4,5,1,6,2)}_{HR}$$

Fig. 3 HR の前後でのカードの並びの変化($n=4$のとき)

命題

2^n 枚の山札に対して, HRを n 回施すと山札が初期配置に戻る.

Table. 1 $n=3$のとき

	1枚目	2枚目	3枚目	4枚目	5枚目	6枚目	7枚目	8枚目
初期配置	1	2	3	4	5	6	7	8
1回目	7	3	8	4	5	1	6	2
2回目	6	8	2	4	5	7	1	3
3回目	1	2	3	4	5	6	7	8

i と書かれたカードが, HR を m 回施した後上から何枚目にあるかを

$$f_m(i)$$

で表す. また,

$$f_0(i) = i$$

とする.

補題

縦軸を i, 横軸を m として表を作る(ただし, $1 \le i \le 2^n$, $0 \le m \le n$). 表の要素 (i,m) を

$$(i,m) = \begin{cases} A & (1 \le f_m(i) \le 2^{n-1}) \\ B & (2^{n-1}+1 \le f_m(i) \le 2^n) \end{cases}$$

とすると, 次のことが成り立つ.

(I) $0 \le m \le n-1$における A, B の横の並びは, iに対して全て異なる.

(II) $m=n$のときの A, B の縦の並びは, $m=0$のときの A, B の縦の並びと一致する.

Table. 2 $n=2$のとき

i \ m	0	1	2
1	A	B	A
2	A	A	A
3	B	B	B
4	B	A	B

Table. 3 $n=3$のとき

i \ m	0	1	2	3
1	A	B	B	A
2	A	B	A	A
3	A	A	B	A
4	A	A	A	A
5	B	B	B	B
6	B	B	A	B
7	B	A	B	B
8	B	A	A	B

(I) の証明

数学的帰納法により示す.

(i) $n=1$のとき成り立つ.

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定する.

$n=k+1, 1 \le i \le 2^k$のとき, $f_1(i)$は

$$f_1(i) = \begin{cases} 2(i+2^{k-1}) & (1 \le i \le 2^{k-1}) \\ 2(i-2^{k-1}) & (2^{k-1}+1 \le i \le 2^k) \end{cases}$$

であり, $n=k$のときの初期配置のちょうど2倍である. よって, $n=k+1$のときの $m=1$から $m=k$までの A, B の横の並びは, $n=k$のときの $m=0$から $m=k-1$までの A, B の横の並びと一致し, iに対し全て異なる. $2^k+1 \le i \le 2^{k+1}$のときも対称性により示せる.

(II) の証明

数学的帰納法により示す.

(i) $n=1$のとき成り立つ.

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定する.

$n=k+1, 1 \le i \le 2^{k-1}$のとき, $f_2(i)$は

$$f_2(i) = \begin{cases} 2(2i+2^{k-1}-1)+1 & (1 \le i \le 2^{k-2}) \\ 2(2i-2^{k-1}-1)+1 & (2^{k-2}+1 \le i \le 2^{k-1}) \end{cases}$$

であり, $n=k, 2^{k-1}+1 \le i \le 2^k$のときの $f_1(i)$ の2倍からずれているので, $n=k+1$のときの$(i,k+1)$の要素と, $n=k$のときの (i,k) の要素は異なる. $2^{k-1}+1 \le i \le 2^k$のとき, $f_2(i)$は

$$f_2(i) = \begin{cases} 2(2i-2^{k-1}) & (2^{k-1}+1 \le i \le 3 \cdot 2^{k-2}) \\ 2(2i-3 \cdot 2^{k-1}) & (3 \cdot 2^{k-2}+1 \le i \le 2^k) \end{cases}$$

であり, $n=k, 1 \le i \le 2^{k-1}$のときの $f_1(i)$ のちょうど2倍なので, $n=k+1$のときの$(i,k+1)$の要素と, $n=k$のときの(i,k)の要素は等しい. $2^k+1 \le i \le 2^{k+1}$のときも対称性により示せる.

参考文献

Persi Diaconis, R. L.Graham and William M. Kator, The mathematics of Perfect Shuffle, Advances in Applied Mathematics, 1983, Vol.4, 175-196.