

圏の同値類の環から構成する分数の環

幸村アンディ 恵人

I 要旨

本研究では、ある圏 $\mathbb{A}$ に対し、その対象の同型類からなる可換モノイド $M(\mathbb{A})$ の group completion $K(\mathbb{A})$ を考察した。さらに、 $K(\mathbb{A})$ に自然な乗法構造を導入することにより可換環を構成し、その代数的性質を考えることで、 $K(\mathbb{A})$ が一般には整域とならないことを示し、零因子を除いた集合による局所化 $X^{-1}K(\mathbb{A})$ (全分数環) を構成した。

II 定義

構造 $\mathbb{A}$ が圏であるとは、次の条件を満たすことである。

- 対象の集まり $\text{Obj}(\mathbb{A})$ をもつ。
- 射の集まり $\text{Mor}(\mathbb{A})$ をもつ。
- 各射 $f \in \text{Mor}(\mathbb{A})$ に対し、 $\text{dom}(f), \text{cod}(f) \in \text{Obj}(\mathbb{A})$ が存在し、 $f : \text{dom}(f) \rightarrow \text{cod}(f)$ と表される。
- $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ に対し、合成射 $g \circ f : A \rightarrow C$ が存在する。
- 射 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ。

- 各対象 A に対し単位射 $1_A : A \rightarrow A$ が存在し、

$$f \circ 1_A = f, \quad 1_B \circ f = f$$

を満たす。

以下、 $\mathbb{A}$ を圏とする。

例：

集合と写像からなる圏を **Set** とする。

- 対象は集合、
- 射は写像である
- 一つの写像において定義域と値域が集合として存在する。
- 値域と定義域が一致する写像にはその二つの写像の合成が存在する。
- 合成は結合法則を果たす
- どの集合においても、その集合を定義域、値域とする恒等写像が存在する。

例：

有限集合と写像からなる圏を **FinSet** とする。

1. 対象は有限集合、
2. 射は有限集合を定義域、値域とする写像である
3. 一つの写像において有限の定義域と値域が集合として存在する。
4. 値域と定義域が一致する写像にはその二つの写像の合成が存在する。
5. 合成は結合法則を果たす
6. どの有限集合においても、その有限集合を定義域、値域とする恒等写像が存在する。

以下で圏における用語を示す。まず、自然数の積、和や集合の積、非交和を一般化した、積、余積、また 整数の”0”や”1”, 空集合、ひとつの要素のみを含む集合を一般化した始対象、終対象が以下のように定義されている。

- ある対象 A, B において、射 $f: C \rightarrow A$, $g: C \rightarrow B$ が存在するすべての対象 C において、図1を果たす対象 $A \otimes B$ を A と B の積という。

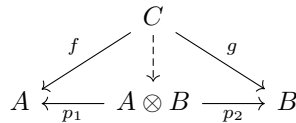


図 1

- ある対象 A, B において、射 $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow C$ が存在するすべての対象 C において、図2を果たす対象 $A \oplus B$ を A と B の余積という。

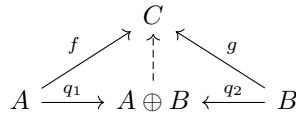


図 2

- 始対象 0 とは、任意の対象 A に対して射 $0 \rightarrow A$ がただ一つ存在する対象である。
- 終対象 1 とは、任意の対象 A に対して射 $A \rightarrow 1$ がただ一つ存在する対象である。

以下 $\mathbb{A}$ は二対象の積、余積、始対象および終対象をもつと仮定する。

例：

集合の圏では、積は集合の直積、余積は集合の非交和、始対象は空集合、終対象はひとつの要素のみを含む集合である。**FinSet** でも同様である。

次に、以下の条件を満たすとき、 A と B は同型であるといい、 $A \cong B$ と表す。
射 $f: A \rightarrow B$ と $f^{-1}: B \rightarrow A$ が存在し、

$$f \circ f^{-1} = 1_B, \quad f^{-1} \circ f = 1_A$$

また $[A]$ を A の同型類とする。

さらに、対象の同型類全体を元とし、

$$[A] + [B] = [A \oplus B]$$

を演算とし、 $[0]$ を単位元とする可換モノイドを $M(\mathbb{A})$ と定義する。

$$[A] + [0] = [A \oplus 0] = [A]$$

であるため、 $[0]$ は加法単位元である。

例：

$\mathbb{A} = \mathbf{FinSet}$ とすると、

$$M(\mathbb{A}) \cong \mathbb{N}$$

である。写像 $\phi([A]) = |A|$ が同型写像である。

例：

$M(\mathbf{Set})$ は基数を元、基数の和を演算としたモノイドである。

III 先行研究

III.1 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ の構成 [1]

$m, n \in \mathbb{N}$ において、 $(m|n) = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N}, m + y = n + x\}$ を $\mathbb{Z}$ の元とする。このとき、 $(m|n)$ の m は整数の正の部分、 n は整数の負の部分として考えられる。 $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ において

$$(m|n) - (p|q) = (m + q|n + p)$$

$$(m|n) \times (p|q) = (mp + nq|mq + np)$$

と定義すると、 $(m|m)$ が加法単位元、 $(m + 1|m)$ が乗法単位元の可換環となる。

III.2 $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ の構成 [1]

$m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ において、 $(m|n) = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, ny = mx\}$ を $\mathbb{Q}$ の元とする。 $m, n, p, q \in \mathbb{Z}, m, p, q \neq 0$ において

$$(m|n) - (p|q) = (mq - np|nq)$$

$$(n|m)/(p|q) = (nq|mp)$$

と定義すると、 $(0|m)$ が加法単位元、 $(m|m)$ が乗法単位元の体となる。

III.3 可換モノイドの group completion [2]

可換モノイド M の group completion $K(M)$ は、次の二つの条件を満たすアーベル群 $K(M)$ である。

1. モノイド準同型写像 $[\] : M \rightarrow K(M)$ が存在する。
2. あるアーベル群 A においてモノイド準同型写像 $\alpha : M \rightarrow A$ が存在するとき、 $\bar{\alpha} \circ [\] = \alpha$ を果たす群準同型写像 $\alpha : K(M) \rightarrow A$ がただひとつ存在する。

この条件は図 3 のように表現できる。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{[\]} & K(M) \\ \alpha \downarrow & \swarrow \bar{\alpha} & \\ A & & \end{array}$$

図 3

$K(M)$ の構成の方法のひとつとしては、すべての $[m], m \in M$ を生成元、 $[m + n] - [m] - [n]$ を関係式とした可換群を $K(M)$ とすることである。

以下 $K(M(\mathbb{A}))$ を $K(\mathbb{A})$ と表記し、 $K(\mathbb{A})$ の要素 $[[A]]$ を $[A]$ と表記する。

例：

モノイド $\mathbb{N}$ の group completion は $\mathbb{Z}$ である。

本研究では $K(M(\mathbb{A}))$ に新たに積を定義した環について考える。

III.4 定理 Weibel [2]

- (a) $K(M)$ のすべての元は, ある $m, n \in M$ において $[m] - [n]$ の形をしている。
 (b) $m, n \in M$ のとき, $K(\mathbb{A})$ において $[m] = [n]$ ならば, ある $x \in M$ において $[m] + [x] = [n] + [x]$ を果たす。

IV $K(\mathbb{A})$ の分数の環

IV.1 半環条件

定理 1

$\mathbb{A}$ が指数対象をもつとき、

$$[A] \cdot [B] = [A \otimes B]$$

を乗法として $M(\mathbb{A})$ は半環である。

Proof. 分配法則について、

$$\begin{aligned} \text{hom}(A \otimes (B \oplus C), X) &\cong \text{hom}(B \oplus C, X^A) \\ &\cong \text{hom}(B, X^A) \times \text{hom}(C, X^A) \\ &\cong \text{hom}(A \times B, X) \times \text{hom}(A \times C, X) \\ &\cong \text{hom}((A \otimes B) \oplus (A \otimes C), X) \end{aligned}$$

が自然同型であることから、

$$A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

が成り立つ。よって分配法則が成立する。ほかの性質も同様に示せる。 □

この定理より、 $M(\mathbf{Set}), M(\mathbf{FinSet})$, はそれぞれ半環であることがわかる。

IV.2 group completion の普遍性

定理 2 モノイド $M \cong N$ ならば $K(M) \cong K(N)$ である。

Proof. $\phi : M \rightarrow N$ をモノイド同型写像とし、

$[]_M : M \rightarrow K(M)$ を M の group completion, $[]_N : N \rightarrow K(N)$ を N の group completion とすると、図 4 のようになる。よって、

$$([]_M \circ \phi^{-1}) \circ ([]_N \circ \phi) = 1_{K(M)}$$

この議論の対称性より、

$$([]_N \circ \phi) \circ ([]_M \circ \phi^{-1}) = 1_{K(N)}$$

が成り立つため、 $K(M) \cong K(N)$ □

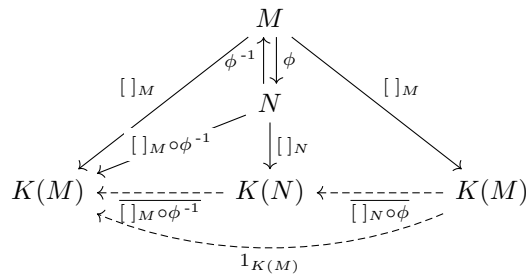


図 4

例：

$K(\mathbf{FinSet}) \cong \mathbb{Z}$ であることがわかる。

IV.3 環構造

3. 1 の乗法の定義を一般化する。
 $K(\mathbb{A})$ に対し、

$$([A] - [C])([B] - [D]) = [A \otimes B] + [C \otimes D] - ([A \otimes D] + [C \otimes B])$$

と定めると、 $K(\mathbb{A})$ は可換環となる。この定義は $M(\mathbb{A})$ の乗法を拡張している。

一般的に $K(\mathbb{A})$ は整域ではない。たとえば **Set** では $\{1\} \not\simeq \{1, 2\}$ だが $\{1\} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \cong \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ より、 $[\{1\}] - [\{1, 2\}]$ は 0 ではないが、 $([\{1\}] - [\{1, 2\}])[\mathbb{N}] = 0$ である

IV.4 全分数環

$K(\mathbb{A})$ の零因子でない元全体を X とする。 X は積で閉じているため、局所化

$$X^{-1}K(\mathbb{A})$$

が定義される。これを $K(\mathbb{A})$ の全分数環と呼ぶ。

$K(\mathbb{A})$ の零因子を特定する。

$x, y \in K(\mathbb{A})$ とする。定理 3. 4(a) よりある $[A], [B], [C], [D] \in M(\mathbb{A})$ において $x = [A] - [B]$ 、 $y = [C] - [D]$ である。 x, y が零因子であることは、 $x \neq 0, y \neq 0$ であり、ある対象 Y において

$$Y \oplus A \otimes C \oplus B \otimes D \cong Y \oplus B \otimes C \oplus A \otimes D$$

を満たすことと同値である。

例：

$K(\mathbf{FinSet})$ は零因子を持たないため、 $X^{-1}K(\mathbf{FinSet}) \cong \mathbb{Q}$ である。

V 結論

本研究では IV.4 の式を導出して、議論が行き詰ってしまった。その要因として、環の定義において乗法が関手的に構成されていなかったことだと考えられる。今後は新たな定義についてに考察、または今の定義を改善し、 $K(\mathbb{A})$ の全分数環の構造を特定することを課題とする。

VI 参考文献

- [1] The Real Numbers and Real Analysis. Ethan D. Bloch (2011)
- [2] The K-book: an introduction to algebraic K-theory. Charles Weibel (2013)
- [3] Category Theory Second Edition. Steve Awodey (2010)