複素数平面における拡張したフィボナッチ数列の隣接項の比の点列がもつ性質

名倉 真央

要旨

拡張したフィボナッチ数列の隣接項の比によって定められた数列を，複素数平面上で点列としてみたときに，この点列がある円上に存在することと点列がある点に収束することを証明した．

キーワード：フィボナッチ数列，複素数平面

1. はじめに

東京大学の 2001 年の入試問題で以下の問題が出題された．この問題の条件設定を変えたものが本研究となる．

問題（2001 東京大学 理科系 第 4 問）

複素数平面上の点 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = i \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \ (n = 1, 2, \cdots)$$

とおく．ただし，i は虚数単位である．

(1) 3 点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ．

(2) すべての点 $b_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ．

2. 先行研究

定理（遠藤一成 , 2002）

数列 $\{a_n\}$ が，$\arg\frac{a_2}{a_1} = \pm 90°$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たすとき，$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ により定まる点列 $\{b_n\}$ は，複素数平面上で，円 $\left|z - \frac{1}{2} - ai\right|^2 = a^2 + \frac{5}{4}$ 上に存在し，点 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に収束する．ここで，$a = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right)$ である．

< proof >

【点列 $\{b_n\}$ は，複素数平面上で，円 $\left|z - \frac{1}{2} - ai\right|^2 = a^2 + \frac{5}{4}$ 上に存在する証明】

$$\left|z - \frac{1}{2} - ai\right|^2 = a^2 + \frac{5}{4} \ \Leftrightarrow \ \left|z - \frac{1}{2} - ai\right|^2 - a^2 - \frac{5}{4} = 0 \ \cdots①$$

b_n が①を満たすことを数学的帰納法で示す．

$\arg\frac{a_2}{a_1} = \pm 90°$ より，$a_1 = wp$，$a_2 = wqi$（$w \in \mathbb{C}$，$p, q \in \mathbb{R}$）とおくと

$$a = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{wqi}{wp} + \frac{wp}{wqi}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{qi}{p} + \frac{p}{qi}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{qi}{p} - \frac{pi}{q}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{p} - \frac{p}{q}\right), \ b_1 = \frac{wqi}{wp} = \frac{qi}{p}$$

となる．

(i) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \left|b_1 - \frac{1}{2} - ai\right|^2 - \frac{5}{4} - a^2 &= \left|\frac{qi}{p} - \frac{1}{2} - ai\right|^2 - \frac{5}{4} - a^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{q^2}{p^2} - \frac{2aq}{p} + a^2 - \frac{5}{4} - a^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{q^2}{p^2} - 2 \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{q}{p} - \frac{p}{q}\right) - \frac{5}{4} \qquad \left(a = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{p} - \frac{p}{q}\right) \text{より}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって，$n = 1$ のとき①を満たす．

(ii) $n=k$ のとき

$\left|b_k-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\frac{5}{4}-a^2=0$ が成り立つと仮定して

$n=k+1$ のとき

$\left|b_{k+1}-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\frac{5}{4}-a^2=0$ が成り立つことを示す.

$b_{k+1}=\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}=\frac{a_k+a_{k+1}}{a_{k+1}}=\frac{1}{b_k}+1$ より

$$\begin{aligned}\left|b_{k+1}-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\frac{5}{4}-a^2 &=\left|\frac{1}{b_k}+1-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\frac{5}{4}-a^2\\ &=\left|\frac{1}{b_k}+1-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\frac{5}{4}-a^2\\ &=\left|\frac{1}{b_k}-ai+\frac{1}{2}\right|^2-\frac{5}{4}-a^2\\ &=\left(\frac{1}{b_k}-ai+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\overline{b_k}}+ai+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{4}-a^2\\ &=-\frac{1}{|b_k|^2}\left\{|b_k|^2-\left(-ai+\frac{1}{2}\right)b_k-\left(ai+\frac{1}{2}\right)\overline{b_k}-1\right\}\\ &=-\frac{1}{|b_k|^2}\left\{\left|b_k-\frac{1}{2}-ai\right|^2-\frac{5}{4}-a^2\right\}\\ &=0\end{aligned}$$

(i)(ii)より，$n\in\mathbb{N}$ に対して，b_nは①を満たす. ■

【点列$\{b_n\}$は，複素数平面上で，点 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に収束する証明】

$a_1=1,\ a_2=i,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

$z^2-z-1=0$の解を$\alpha,\beta\ (\alpha>\beta)$とおくと $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ となる.

このとき， $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$を変形すると

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ または $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

と変形できるので

$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$…①

$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$…②

①，②より

$a_n=\frac{\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)}{\beta-\alpha}$

したがって

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{a_{n+1}}{a_n}\\ &=\frac{\beta^n(a_2-\alpha a_1)-\alpha^n(a_2-\beta a_1)}{\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)}\\ &=\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\beta(a_2-\alpha a_1)-\alpha(a_2-\beta a_1)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-(a_2-\beta a_1)}\end{aligned}$$

$|\alpha|>|\beta|$より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}=0$ なので

$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{-\alpha(a_2-\beta a_1)}{-(a_2-\beta a_1)}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

したがって，点列$\{b_n\}$は，複素数平面上で，点 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に収束する. ■

3. 複素数平面における拡張したフィボナッチ数列

定理 1

数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$を満たすとき，$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$により定まる点列$\{b_n\}$は，複素数平面上で，円$\left|z-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2=\frac{3}{2}$上に存在する．

＜proof＞

$$\left|z-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2=\frac{3}{2}\ \Leftrightarrow\left|z-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2-\frac{3}{2}=0\ \cdots①$$

b_nが①を満たすことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\left|b_1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2-\frac{3}{2}&=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2-\frac{3}{2}\\&=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)i\right|^2-\frac{3}{2}\\&=0\end{aligned}$$

したがって，$n=1$のとき①を満たす．

(ii) $n=k$のとき

$\left|b_k-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2-\frac{3}{2}=0$ が成り立つと仮定して

$n=k+1$のとき

$\left|b_{k+1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2-\frac{3}{2}=0$ が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}\left|b_{k+1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2-\frac{3}{2}&=\left|\frac{1}{b_k}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|^2-\frac{3}{2}\\&=\left|\frac{1}{b_k}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|^2-\frac{3}{2}\\&=\left|\frac{1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)b_k}{b_k}\right|^2-\frac{3}{2}\\&=\frac{\left\{1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)b_k\right\}\left\{1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\overline{b_k}\right\}}{b_k\overline{b_k}}-\frac{3}{2}\\&=\frac{1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\overline{b_k}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)b_k+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)b_k\overline{b_k}}{b_k\overline{b_k}}-\frac{3}{2}\\&=\frac{1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\overline{b_k}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)b_k+\frac{1}{2}b_k\overline{b_k}}{b_k\overline{b_k}}-\frac{3}{2}\\&=\frac{1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\overline{b_k}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)b_k-b_k\overline{b_k}}{b_k\overline{b_k}}\\&=-\frac{1}{|b_k|^2}\left\{b_k\overline{b_k}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)b_k-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\overline{b_k}-1\right\}\\&=-\frac{1}{|b_k|^2}\left[\left\{b_k-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right\}\left\{\overline{b_k}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right\}-\frac{1}{2}-1\right]\\&=-\frac{1}{|b_k|^2}\left\{\left|b_k-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right|^2-\frac{3}{2}\right\}\\&=0\end{aligned}$$

(i)(ii)より，$n\in\mathbb{N}$に対して，b_nは①を満たす．■

定理 2

数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_2=i$，$a_{n+2}=pa_{n+1}+a_n$ $(p\in\mathbb{R})$を満たすとき，$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$により定まる点列$\{b_n\}$は，複素数平面上で，円$\left|z-\frac{p}{2}\right|^2=1+\frac{p^2}{4}$上に存在する．

＜proof＞

$$\left|z-\frac{p}{2}\right|^2=1+\frac{p^2}{4}\ \Leftrightarrow\left|z-\frac{p}{2}\right|^2-1-\frac{p^2}{4}=0\ \cdots①$$

b_nが①を満たすことを数学的帰納法で示す．

(ii) $n=1$のとき

$$\left|b_1-\frac{p}{2}\right|^2-1-\frac{p^2}{4}=\left|i-\frac{p}{2}\right|^2-1-\frac{p^2}{4}$$
$$=\left(i-\frac{p}{2}\right)\left(-i-\frac{p}{2}\right)-1-\frac{p^2}{4}$$
$$=0$$

したがって, $n=1$のとき①を満たす.

(ii) $n=k$のとき

$\left|b_k-\frac{p}{2}\right|^2-1-\frac{p^2}{4}=0$ が成り立つと仮定して,

$n=k+1$のとき

$\left|b_{k+1}-\frac{p}{2}\right|^2-1-\frac{p^2}{4}$ が成り立つことを示す.

$$\left|b_{k+1}-\frac{p}{2}\right|^2-1-\frac{p^2}{4}=\left|p+\frac{1}{b_k}-\frac{p}{2}\right|^2-1-\frac{p^2}{4}$$
$$=\left|\frac{1+\frac{p}{2}b_k}{b_k}\right|^2-1-\frac{p^2}{4}$$
$$=\frac{\left(1+\frac{p}{2}b_k\right)\left(1+\frac{p}{2}\overline{b_k}\right)}{b_k\overline{b_k}}-1-\frac{p^2}{4}$$
$$=\frac{1+\frac{p}{2}\overline{b_k}+\frac{p}{2}b_k+\frac{p^2}{4}b_k\overline{b_k}}{b_k\overline{b_k}}-1-\frac{p^2}{4}$$
$$=-\frac{1}{|b_k|^2}\left\{|b_k|^2-\frac{p}{2}b_k-\frac{p}{2}\overline{b_k}-1\right\}$$
$$=-\frac{1}{|b_k|^2}\left\{\left(b_k-\frac{p}{2}\right)\left(\overline{b_k}-\frac{p}{2}\right)-\frac{p^2}{4}-1\right\}$$
$$=-\frac{1}{|b_k|^2}\left(\left|b_k-\frac{p}{2}\right|^2-\frac{p^2}{4}-1\right)$$
$$=0$$

(i)(ii)より, $n\in\mathbb{N}$に対して, b_nは①を満たす. ■

定理 3

数列$\{a_n\}$が, $a_1=1$, $a_2=i$, $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ $(p,q\in\mathbb{R})$ を満たすとき, $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ により定まる点列$\{b_n\}$は, 複素数平面上で, 円 $\left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\right|^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{1+q}{2}\right)^2$ 上に存在する.

< proof >

$$\left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\right|^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{1+q}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2=0\ \cdots①$$

b_nが①を満たすことを数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき

$$\left|b_1-\left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2=\left|i-\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right|^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2$$
$$=0$$

したがって, $n=1$のとき①を満たす.

(i) $n=k$ のとき

$\left|b_k-\left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2=0$ が成り立つと仮定して

$n=k+1$ のとき

$\left|b_{k+1}-\left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2=0$ が成り立つことを示す.

$$\left|b_{k+1}-\left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2=\left|p+\frac{q}{b_k}-\frac{p}{2}-\frac{1-q}{2}i\right|^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2$$
$$=\left|\frac{q+\left(\frac{p}{2}-\frac{1-q}{2}i\right)b_k}{b_k}\right|^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2$$
$$=\frac{\left\{q+\left(\frac{p}{2}-\frac{1-q}{2}i\right)b_k\right\}\left\{q+\left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\overline{b_k}\right\}}{b_k\overline{b_k}}-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2$$
$$=\frac{q^2+q\left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\overline{b_k}+q\left(\frac{p}{2}-\frac{1-q}{2}i\right)b_k+\left\{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{1-q}{2}\right)^2\right\}b_k\overline{b_k}}{b_k\overline{b_k}}-\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1+q}{2}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{q}{|b_k|^2}\left\{|b_k|^2 - \left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\overline{b_k} - \left(\frac{p}{2}-\frac{1-q}{2}i\right)b_k - q\right\}\\
&= -\frac{q}{|b_k|^2}\left[\left\{b_k - \left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\right\}\left\{\overline{b_k} - \left(\frac{p}{2}-\frac{1-q}{2}i\right)\right\} - \left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{1-q}{2}i\right) - q\right]\\
&= -\frac{q}{|b_k|^2}\left[\left|b_k - \left(\frac{p}{2}+\frac{1-q}{2}i\right)\right|^2 - \left\{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+q}{2}\right)^2\right\}\right]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

(i)(ii)より, $n \in \mathbb{N}$に対して, b_nは①を満たす. ■

定理 4

数列$\{a_n\}$が, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2} + pi$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $(p \in \mathbb{R})$ を満たすとき, $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ により定まる点列$\{b_n\}$は, 複素数平面上で, 円$\left|z - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)\right|^2 = \frac{5}{4} + \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2$上に存在する.

< proof >

$$
\left|z - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)\right|^2 = \frac{5}{4} + \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2 \Leftrightarrow \left|z - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)\right|^2 - \frac{5}{4} - \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2 = 0 \quad \cdots ①
$$

b_nが①を満たすことを数学的帰納法で示す.

(i) $n = 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\left|b_1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)\right|^2 - \frac{5}{4} - \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2 &= \left|\frac{1}{2} + pi - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)\right|^2 - \frac{5}{4} - \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2\\
&= \left|p\,i - \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right|^2 - \frac{5p^2+p^4-\frac{5}{2}p^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}{4p^2}\\
&= \left|\frac{2p^2-\left(p^2-\frac{5}{4}\right)}{2p}\,i\right|^2 - \frac{p^4+\frac{5}{2}p^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}{4p^2}\\
&= \left|\frac{p^2+\frac{5}{4}}{2p}i\right|^2 - \frac{\left(p^2+\frac{5}{4}\right)^2}{4p^2}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって, $n = 1$のとき①を満たす.

(ii) $n = k$ のとき

$\left|b_k - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)\right|^2 - \frac{5}{4} - \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2 = 0$ が成り立つと仮定して

$n = k + 1$ のとき

$\left|b_{k+1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)\right|^2 - \frac{5}{4} - \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2 = 0$ が成り立つことを示す.

$$
\begin{aligned}
\left|b_{k+1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)\right|^2 - \frac{5}{4} - \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2 &= \left|1 + \frac{1}{b_k} - \frac{1}{2} - \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\,i\right|^2 - \frac{5}{4} - \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2\\
&= \left|\frac{1+\left(\frac{1}{2} - \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)b_k}{b_k}\right|^2 - \frac{5}{4} - \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2\\
&= \frac{\left\{1+\left(\frac{1}{2} - \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)b_k\right\}\left\{1+\left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}i\right)\overline{b_k}\right\}}{b_k\overline{b_k}} - \frac{5}{4} - \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2\\
&= -\frac{1}{|b_k|^2}\left\{|b_k|^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\,i\right)\overline{b_k} - \left(\frac{1}{2} - \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\,i\right)b_k - 1\right\}\\
&= -\frac{1}{|b_k|^2}\left[\left\{b_k - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\,i\right)\right\}\left\{\overline{b_k} - \left(\frac{1}{2} - \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\,i\right)\right\} - \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2\right\} - 1\right]\\
&= -\frac{1}{|b_k|^2}\left[\left|b_k - \left(\frac{1}{2} + \frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\,i\right)\right|^2 - \left\{\frac{5}{4} + \left(\frac{p^2-\frac{5}{4}}{2p}\right)^2\right\}\right]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

(i)(ii)より, $n \in \mathbb{N}$に対して, b_nは①を満たす. ■

4. 複素数平面における一般化したフィボナッチ数列

定理 5

数列 $\{a_n\}$ が $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ $(p,q\in\mathbb{R})$ を満たすとき，$b_1=s+ti$ $(s,t\in\mathbb{R},\ t\neq 0)$，$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ により定まる点列$\{b_n\}$に対して，方程式 $z^2-pz-q=0$ の判別式を D としたとき，次が成り立つ．

・$D>0$ ならば，点列 $\{b_n\}$ は複素数平面上で円 $\left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2=\frac{p^2}{4}+q+\frac{r_0^2}{4}$ 上に存在する．

ただし，$r_0=\frac{s^2+t^2-ps-q}{t}$ とする．

また，点列 $\{b_n\}$ の収束について次が成り立つ．

$p>0$のとき，点列 $\{b_n\}$ は複素平面上で点 $\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ に収束する．

$p<0$のとき，点列 $\{b_n\}$ は複素平面上で点 $\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ に収束する．

・$D=0$ ならば，点列 $\{b_n\}$ は複素数平面上で円 $\left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2=\frac{r_1^2}{4}$ 上に存在する．

ただし，$r_1=\frac{\left(s-\frac{p}{2}\right)^2+t^2}{t}$ とする．

また，点列 $\{b_n\}$ は複素平面上で点 $\frac{p}{2}$ に収束する．

＜proof＞

・$D>0$ のとき

【点列$\{b_n\}$は，複素数平面上で，円 $\left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2=\frac{p^2}{4}+q+\frac{r_0^2}{4}$ 上に存在する証明】

$$\left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2=\frac{p^2}{4}+q+\frac{r_0^2}{4}\ \Leftrightarrow\ \left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)=0\quad\cdots①$$

b_nが①を満たすことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\left|b_1-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)&=\left|s+ti-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)\\&=\left|s-\frac{p}{2}+\left(t-\frac{r_0}{2}\right)i\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)\\&=\left(s-\frac{p}{2}\right)^2+\left(t-\frac{r_0}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)\\&=s^2+t^2-ps-r_0t-q\\&=s^2+t^2-ps-\frac{s^2+t^2-ps-q}{t}\cdot t-q\\&=0\end{aligned}$$

したがって，$n=1$のとき①を満たす．

(ii) $n=k$ のとき

$\left|b_k-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)=0$ が成り立つと仮定して

$n=k+1$ のとき

$\left|b_{k+1}-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)=0$ が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}\left|b_{k+1}-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)&=\left|p+\frac{q}{b_k}-\frac{p}{2}-\frac{r_0}{2}i\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)\\&=\left|\frac{q+\left(\frac{p}{2}-\frac{r_0}{2}i\right)b_k}{b_k}\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)\\&=\frac{\left\{q+\left(\frac{p}{2}-\frac{r_0}{2}i\right)b_k\right\}\left\{q+\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\overline{b_k}\right\}}{b_k\overline{b_k}}-\left(\frac{p^2}{4}+q+\frac{{r_0}^2}{4}\right)\\&=-\frac{q}{|b_k|^2}\left\{b_k\overline{b_k}-\left(\frac{p}{2}-\frac{r_0}{2}i\right)b_k-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\overline{b_k}-q\right\}\\&=-\frac{q}{|b_k|^2}\left\{\left|b_k-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i\right)\right|^2-\left(\frac{p^2}{4}+\frac{{r_0}^2}{4}+q\right)\right\}\\&=0\end{aligned}$$

(i)(ii)より，$n\in\mathbb{N}$に対して，b_nは①を満たす．■

【点列$\{b_n\}$の収束先についての証明】

$z^2-pz-q=0$ の解を $\alpha,\beta\ (\alpha>\beta)$ とすると，$\alpha=\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$，$\beta=\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ となる．

このとき，$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ を変形すると

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$　または　$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

と変形できるので

$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$ …①

$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$ …②

①，②より

$a_n=\frac{\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)}{\beta-\alpha}$

したがって

$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$=\frac{\beta^{n}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n}(a_2-\beta a_1)}{\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)}$

$p>0$ のとき，$|\alpha|>|\beta|$より$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}=0$ なので

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}\beta(a_2-\alpha a_1)-\alpha(a_2-\beta a_1)}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}(a_2-\alpha a_1)-(a_2-\beta a_1)}=\frac{-\alpha(a_2-\beta a_1)}{-(a_2-\beta a_1)}=\alpha=\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$

$p<0$のとき，$|\alpha|<|\beta|$より$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}=0$ なので

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(a_2-\alpha a_1)-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\alpha(a_2-\beta a_1)}{(a_2-\alpha a_1)-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}(a_2-\beta a_1)}=\frac{\beta(a_2-\beta a_1)}{(a_2-\beta a_1)}=\beta=\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$

したがって，点列$\{b_n\}$は$p>0$ならば，点$\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$に収束し，$p<0$ならば，点$\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$に収束する．■

・$D=0$ のとき

【点列$\{b_n\}$は，複素数平面上で，円 $\left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2=\frac{r_1^2}{4}$ 上に存在する証明】

$\left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2=\frac{r_1^2}{4}\ \Leftrightarrow\ \left|z-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2-\frac{r_1^2}{4}=0$　…①

b_nが①を満たすことを数学的帰納法で示す.

まず,

$D=0\ \Leftrightarrow\ p^2+4q=0$ …②

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\left|b_1-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2-\frac{r_1^2}{4}&=\left|s+ti-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2-\frac{r_1^2}{4}\\&=\left|s-\frac{p}{2}+\left(t-\frac{r_1}{2}\right)i\right|^2-\frac{r_1^2}{4}\\&=\left(s-\frac{p}{2}\right)^2+\left(t-\frac{r_1}{2}\right)^2-\frac{r_1^2}{4}\\&=s^2+t^2-ps-r_1t+\frac{p^2}{4}\\&=s^2+t^2-ps-\frac{\left(s-\frac{p}{2}\right)^2+t^2}{t}\cdot t+\frac{p^2}{4}\\&=0\end{aligned}$$

したがって，$n=1$のとき①を満たす.

(ii) $n=k$ のとき

$\left|b_k-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2-\frac{r_1^2}{4}=0$ が成り立つと仮定して

$n=k+1$ のとき

$\left|b_{k+1}-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2-\frac{r_1^2}{4}=0$ が成り立つことを示す.

$$\left|b_{k+1}-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2-\frac{r_1^2}{4}=\left|p+\frac{q}{b_k}-\frac{p}{2}-\frac{r_1}{2}i\right|^2-\frac{r_1^2}{4}$$
$$=\left|\frac{q+\left(\frac{p}{2}-\frac{r_1}{2}i\right)b_k}{b_k}\right|^2-\frac{r_1^2}{4}$$
$$=\frac{\left\{q+\left(\frac{p}{2}-\frac{r_1}{2}i\right)b_k\right\}\left\{q+\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\overline{b_k}\right\}}{b_k\overline{b_k}}-\frac{r_1^2}{4}$$
$$=-\frac{q}{|b_k|^2}\left\{-q-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\overline{b_k}-\left(\frac{p}{2}-\frac{r_1}{2}i\right)b_k-\frac{p^2}{4}\cdot\frac{1}{q}|b_k|^2\right\}$$
$$=-\frac{q}{|b_k|^2}\left\{\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\overline{b_k}-\left(\frac{p}{2}-\frac{r_1}{2}i\right)b_k+|b_k|^2\right\}\quad(②より)$$
$$=-\frac{q}{|b_k|^2}\left\{\left|b_k-\left(\frac{p}{2}+\frac{r_1}{2}i\right)\right|^2-\frac{r_1^2}{4}\right\}$$
$$=0$$

(i)(ii)より, $n\in\mathbb{N}$に対して, b_nは①を満たす. ■

【点列$\{b_n\}$が複素平面上で点 $\frac{p}{2}$ に収束する証明】

$z^2-pz-q=0$ の重解を $\alpha\,(=\beta)$ とすると, $2\alpha=p,\ \alpha^2=-q$ となる.

このとき, $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ を変形すると

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)\ \cdots①$$

と変形できる. ここで $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ なので ① の両辺を a_{n+1} で割ると

$$b_{n+1}-\alpha=\frac{\alpha}{b_n}(b_n-\alpha)$$

$\lim_{n\to\infty}b_n=L$ と仮定すると

$$L-\alpha=\frac{\alpha}{L}(L-\alpha)$$

整理すると

$$(L-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{L}\right)=0$$

これを解くと $L=\alpha$. すなわち $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$.

したがって, 点列$\{b_n\}$は点 $\frac{p}{2}$ に収束する. ■

≪ ※ $D>0$ のときの円を求める ≫

$b_{n+1}=p+\frac{q}{b_n}$ であるから

$$z=p+\frac{q}{z}\iff z^2-pz-q=0\ \cdots①$$

を考える. ① の解を $\alpha,\ \beta$ とする. α は①の解なので, $\alpha^2-p\alpha-q=0\iff\alpha^2-p\alpha=q\ \cdots②$

$b_1=s+t\,i$ と α,β の 3 点を通る円の中心を $c=\frac{p}{2}+v_0\,i$ $(v_0\in\mathbb{R})$とおく.

円は点 $\alpha\,(\in\mathbb{R})$ を通るので, 半径をR とすると

$$R^2=|\alpha-c|^2=\left|\alpha-\left(\frac{p}{2}+v_0\,i\right)\right|^2$$

②より

$$R^2=\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)^2+v_0^2$$
$$=\frac{p^2}{4}+q+v_0^2$$

$b_1=s+t\,i$ は円上の点なので

$$\left|(s+ti)-\left(\frac{p}{2}+v_0i\right)\right|^2=\frac{p^2}{4}+q+v_0^2$$
$$s^2-ps+\frac{p^2}{4}+t^2+2tv_0+v_0^2=\frac{p^2}{4}+q+v_0^2$$
$$2tv_0=ps+q-(s^2+t^2)$$
$$v_0=\frac{ps+q-(s^2+t^2)}{2t}\left(=\frac{r_0}{2}\text{ とおく}\right)$$

よって, 円の中心は $c=\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i$, 半径については $R^2=\frac{p^2}{4}+q+\frac{r_0^2}{4}$ であると推測できた.

≪ ※ $D=0$ のときの円を求める ≫

$b_{n+1}=p+\frac{q}{b_n}$ であるから

$$z=p+\frac{q}{z} \iff z^2-pz-q=0 \quad \cdots①$$

を考える．また，

$$D=0 \iff p^2+4q=0 \cdots②$$

① の解を $\alpha\,(=\beta)$ とする．α は①の解なので，$\alpha^2-p\alpha-q=0 \iff \alpha^2-p\alpha=q \cdots③$

$b_1=s+t\,i$ と α を通る円の中心を $c=\frac{p}{2}+v_0\,i$ $(v_0\in\mathbb{R})$ とおく．

円は点 $\alpha\,(\in\mathbb{R})$ を通るので，半径をR とすると

$$\begin{aligned}R^2&=|\alpha-c|^2\\&=\left|\alpha-\left(\frac{p}{2}+v_0\,i\right)\right|^2\\&=\left(\alpha-\frac{p}{2}\right)^2+v_0^2 \quad (③より)\\&=\frac{p^2}{4}+q+v_0^2\\&=v_0^2 \quad (②より)\end{aligned}$$

$b_1=s+t\,i$ が円を通るので

$$\left|(s+ti)-\left(\frac{p}{2}+v_0 i\right)\right|^2=v_0^2$$

$$s^2-ps+\frac{p^2}{4}+t^2+2tv_0+v_0^2=v_0^2$$

$$2tv_0=ps+q-(s^2+t^2)$$

$$v_0=\frac{ps+q-(s^2+t^2)}{2t}\left(=\frac{r_0}{2}\ \text{とおく}\right)$$

円の中心は $c=\frac{p}{2}+\frac{r_0}{2}i$ ，半径については $R^2=\frac{r_0^2}{4}$ であると推測できた．

参考文献

遠藤一成，複素フィボナッチ数列，数研通信，2002 年 12 月，45 号．