

条件付き積み上げ式 n 並べにおける先手必勝型の石の配列

渡邊知志

2025 年 2 月 22 日

概要

Frank Harary の一般化三並べを,石を積み上げる形に変形したゲームについて,勝利条件となる石の配列を 2 種類にした場合の組合せを,先手必勝か引き分けになるかの 2 通りに分類した.

1 はじめに

条件付き積み上げ式 n 目並べとは, Frank Harary が提案した一般化三並べを改変したものである. この一般化三並べは, 碁盤面上に 2 人のプレイヤーが交互に石を 1 つずつ置き, 目標とする石の配置を先に作ったプレイヤーが勝利するという完全情報ゲームである. ここで目標とする石の配置を動物と呼び, その動物を構成する石の数を細胞数と呼ぶ. このゲームでは, 動物の形状は辺で連結した石の配置に制限する. また, 90 度ごとの回転や反転した配置は同じ動物であるとみなす. 例として, 図 1 で示した 4 つの石の配列は, すべて同一の動物とみなす.

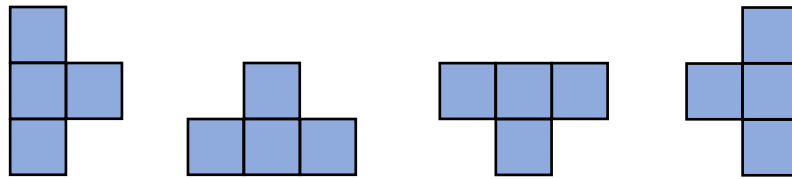


図 1 同一の動物とみなせる石の配列

このゲームで使用される盤面の大きさは無限大となっている. 一般化三並べでは, 後手には必勝手順が存在せず, 動物の形によって先手に必勝手順が存在するか, または勝敗がつかずにゲームが無限に続くかのどちらかであることが知られている. 先手に必勝手順が存在する動物は勝ち型と呼ばれ, そうでない場合, すなわち後手がうまく防御すれば無限にゲームを続けられる動物は負け型と呼ばれる. 先行研究では, 唯一, Snaky と呼ばれる細胞数 6 の動物を除いたすべての動物で, 勝ち型か負け型かの判定がなされている.

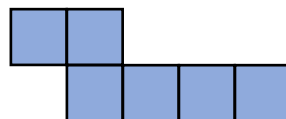


図 2 Snaky

2 条件付き積み上げ式 n 並べの石の配列の分類

先行研究では,石を碁盤上に置くことでゲームを実行しているが,石を直線上に積み上げたときの勝ち型か,負け型かの分類は未解明であるので, Frank Harary の一般化三並べを变形した新しいゲームについて研究を行う。

2.1. ゲーム I

2 人のプレイヤーで交互に石を 1 つずつ置くゲームであって,以下の条件を満たすものを条件付き積み上げ式 n 並べ (I) という。

ルール

- (i) ある直線上にプレイヤーは石を置く. 右側を正, 最初に先手が石を置く位置を 0 として, 直線の位置が X で Y 段目の場所を (X, Y) と表す.
- (ii) プレイヤーは, あらかじめ置かれた石の隣にしか新しく石を置けない.
- (iii) プレイヤーは, あらかじめ置かれた石の上, または直線上の床の上にしか石を置けない.
- (iv) 目標とする石の配置を動物と呼び, その動物を構成する石の数を細胞数と呼ぶ. 回転, 反転をして一致する動物は同一であるとみなす.
- (v) 勝利条件となる動物の種類は 1 つだけである.

定理 2.1. 積み上げ式 n 並べ (I) において, m を任意の自然数とすると, $1 \times m$ の長方形の形をとらない動物は必ず負け型となる.



図 3 $1 \times m$ の長方形の動物

証明. $1 \times m$ の長方形でない動物が作られるとき, プレイヤーは完成した動物の一部において, 必ず石を 2 段以上積み上げている箇所が存在する. よって, 後手が先手の石の上に常に石を置くように行動すると, 先手の石は $2k-1$ 段目 ($k \in \mathbb{N}$) にしか置くことができないため, 石を 2 段以上積み上げられることができない. よって, $1 \times m$ の長方形でない動物は必ず負け型となる. $\square$

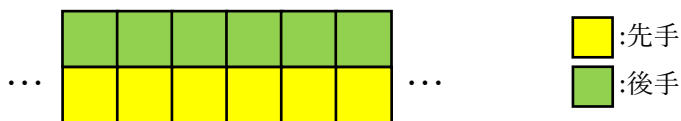


図 4 後手の行動手順

定理 2.2. 勝ち型となる動物は、 $1 \times m$ の長方形だけであり、 $m \in \mathbb{N}$ かつ $1 \leq m \leq 3$ を満たす。

証明. (i) $m=1$ のとき、先手が最初に石を置いたときに動物が完成するので勝ち型である。

(ii) $m=2$ のとき、先手が最初に置いた石の周りには、 $(-1,0)(1,0)(0,1)$ の 3 マス石を置ける場所が存在し、後手がこの 3 マスのどこに石を置いたとしても、後手が置ける石の個数は 1 つだけなので、先手が最初においた石の隣に先手がまた石を置くことができる。よって、この場合も勝ち型である。

(iii) $m=3$ のとき、 $(0,1)$ に後手が最初に石を置く場合を考えると、その次に先手が、 $(-1,0)(1,0)$ に石を置くことができる。このとき、先手が置いた石 2 つの左右どちらかに石を置くと、先手が勝つことになる。後手は左右のマスどちらかにしか石を置くことができないため、この場合は先手必勝である。また、先手が最初に置いた石の横に後手が石を置いたとき、図 5 のような形で先手が勝利する。最初に置いた石の横と上に先手がそれぞれ石を置くと、それぞれ横方向と上方向に、先手がもう 1 つ石を置くことで動物を完成できる状態になるので、後手はそれを阻止するために、先手が置いた石のそれぞれ横、上に石を置く必要がある。ここで先手が、最初に置いた石の横にある先手の石の上側にさらに石を置くと、2 段目に先手の石 2 つが横に連なり、その左右に石を置くことが出来る、すなわち先手が勝てる状態になる。後手は左右のマスどちらかにしか石を置くことができないため、この場合は先手必勝である。

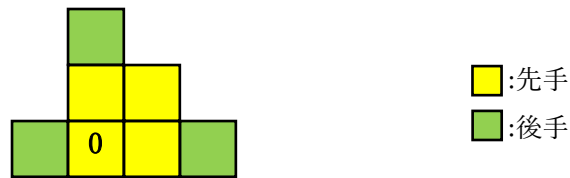


図 5 (iii)の行動手順

(iv) $m \geq 4$ のとき、後手の行動を以下のように行う。ただし、 $p \in \mathbb{N}$ とする。

- ① 後手は最初に $(0,2)$ に石を置く。
 - ② 先手の石が $(\pm(3p-2), 1)$ に置かれたとき、後手は $(\pm(3p-1), 1)$ に石を置く。
 - ③ 先手の石が $(\pm(3p-2), 1)$ 以外の場所に置かれたとき、後手は先手が置いた石の上に石を置く。
- ②, ③を繰り返すと、先手は縦方向に石を 3 つ以上石を積み上げられず、横方向にも石を 4 つ以上並べられないことができないため、負け型となる。

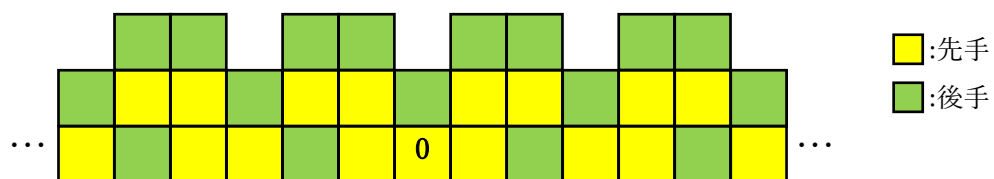


図6 (iv)の行動手順

2.2.ゲームⅡ

2人で交互に石を1つずつ置くゲームであって,以下の条件を満たすものを条件付き積み上げ式 n 並べ(Ⅱ)という。

ルール

- (i)ある直線上にプレイヤーは石を置く.右側を正,最初に先手が石を置く位置を0として,直線の位置が X で Y 段目の場所を (X,Y) と表す.
- (ii)プレイヤーは,あらかじめ置かれた石の隣にしか新しく石を置けない.
- (iii)プレイヤーは,あらかじめ置かれた石の上,または直線上の床の上にしか石を置けない.
- (iv)目標とする石の配置を動物,動物を形成する石を細胞,その動物を構成する石の数を細胞数と呼ぶ.回転,反転をして一致する動物は同一であるとみなす.
- (v)勝利条件となる動物の種類は2つであり,このうちどちらか片方の動物を完成させることで勝利とする.動物の組合せは,動物Aと動物Bが勝利条件とくと $[A,B]$ と表す.

定理 2.3.条件付き積み上げ式 n 並べ(Ⅱ)において, m を任意の自然数とすると, $1 \times m$ の長方形の形をとる動物が含まれていない動物の組合せは負け型となる.

証明. $1 \times m$ の長方形でない動物が作られるとき,プレイヤーは完成した動物の一部において,必ず石を2段以上積み上げている箇所が存在する.よって,後手が先手の石の上に常に石を置くように行動すると,先手の石は $2k-1$ 段目($k \in \mathbb{N}$)にしか置くことができないため,石を2段以上積み上げられることができない.よって, $1 \times m$ の長方形である動物を含まない動物の組合せは必ず負け型となる. $\square$

定理 2.4.負け型となる動物の組合せ $[A,B]$ が存在するとき,動物Aを内部に含む,もしくは一致する動物Cと,動物Bを内部に含む,もしくは一致する動物Dの組合せ $[C,D]$ は負け型となる.



図7 他の動物を含む動物の例

図7で示したように,青色の細胞だけで成る動物をそれぞれ動物Aと動物B,青色と黄色の細胞

どちらも含む動物をそれぞれ動物 C と動物 D と考える。

証明.動物 C を動物 A と動物 E,動物 D を動物 B と動物 F に分解する.[A,B]は負け型より,どのように先手が石を動かしても動物 A,B が完成しない手順が存在する.後手が動物 A,B を先手が完成させないように石を置くと,先手は動物 E,F を作ることは可能であるが,動物 A,B を作ることはできないので,動物 E と動物 A を結合して動物 C を,動物 F と動物 B を結合して動物 D を完成させることができない.よって,[A,B]が負け型ならば,[C,D]も負け型である. $\square$

定理 2.5. 動物の組合せの中に, $1 \times m(m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq 3)$ の長方形の動物が含まれるとき,この動物の組合せは勝ち型となる.

証明.定理 2.2.より, $1 \times m(m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq 3)$ の長方形の動物は条件付き積み上げ式 n 目並べ (I) において勝ち型であるから,条件付き積み上げ式 n 目並べ (II) においても,先手が必ずこの動物を完成させることができるので,この動物を含む動物の組合せは勝ち型と判別できる.

定理 2.6.細胞数が 5 以上の動物 A,B の動物の組合せ [A,B]は負け型である.

証明. 図 8 の動物を P,図 9 の動物を Q とし, 1×5 の長方形の形の動物を動物 R とする.

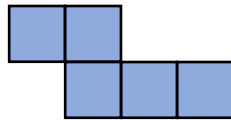


図 8 動物 P

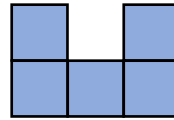


図 9 動物 Q

細胞数が 5 の動物の組合せについて考える.

(i) 1×4 の長方形の形の動物 S を内部に含む動物 2 つの組合せは,動物 S が積み上げ式 n 目並べ (I) で負け型である,すなわち動物の組合せ [S,S]が負け型であるとみなせるので,定理 2.4.より,負け型である.

(ii) 動物 R を組合せに含まないとき,定理 2.3.より,負け型である.

(iii) 動物 R と,動物 P,Q,S でない,細胞数が 5 の他の動物の組合せのとき,後手の行動を以下のように行う.ただし, $q \in \mathbb{N}$ とする.

- ① 最初に後手は(0,2)に石を置く.
- ② 先手の石が $(\pm(3q-2),1)$ に置かれたとき,後手は $(\pm(3q-1),1)$ に石を置く.
- ③ 先手の石が $(\pm(3q-2),1)$ 以外の場所に置かれたとき,後手は先手が置いた石の上に石を置く.

①,②を繰り返すと,先手が作ることでできる細胞数が 5 の動物は,動物 P か動物 Q のみであるため,この組合せは負け型となる. 後手の行動は図 6 と同様となる.

(iv) [P,R],または[Q,R]のとき,後手の行動を以下のように行う.ただし, $q \in \mathbb{N}$ とする.

- ① 先手の石が $(3-3q,1)(3q-2,1)$ 以外の場所に置かれたとき,後手は先手が置いた石の上に石を置く.
 - ② 先手の石が $(3-3q,1)$ に置かれたとき,後手はその石の左側に石を置く.
 - ③ 先手の石が $(3q-2,1)$ に置かれたとき,後手はその石の右側に石を置く.
- これを繰り返すと,先手は動物 P,Q,R を作ることができないため,[P,R],[Q,R]は負け型である.したがって,細胞数が5の動物同士の組合せはすべて負け型であるから,定理 2.4.より,細胞数が5以上の動物2つの組合せはすべて負け型となる.

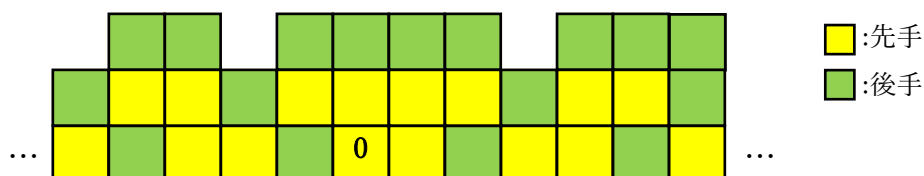


図 10 (iv)の行動手順

定理 2.7. $1 \times k (k \in \mathbb{N})$ の長方形である動物を A とおき,図 11 に示した動物を B とおくと,動物の組合せ[A,B]は勝ち型である.

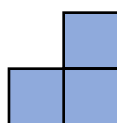


図 11

証明.先手が最初に置いた石の横に,後手が石を置くと,先手は最初に置いた石の横に石を置くことで,置いた石の上2マスどちらかに石を置くことで動物 B を完成できる.後手が石を置くことのできるマスは1つだけであるから,このとき,動物 B は完成する.先手が最初に置いた石の上に,後手が石を置くとき,後手は先手が置く石の上に石を置くという操作を繰り返さなければ,動物 B を先手が完成させるのを阻止することができない.しかし,この操作を繰り返すことで,1段目に先手が無限に石を置き続けることができるので,動物 A,B のどちらかを先手が完成することが可能である.よって,[A,B]は勝ち型である.

定理 2.8. 図 12,13,14,15,16 で示した動物をそれぞれ A,B,C,D,E とおくと,この5つの動物の組合せにおいて,勝ち型であるのは[A,B],[A,C]のみである.



図 12 動物 A

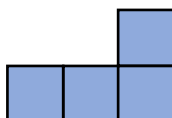


図 13 動物 B

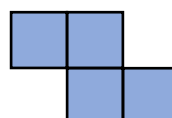


図 14 動物 C

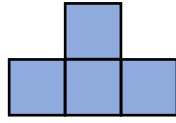


図 15 動物 D



図 16 動物 E

証明.定理 2.3.より,動物 A を含まない動物の組合せは負け型であるため,動物 A とその他の動物の組合せを考える.

(i) $[A, B]$ のとき,定理 2.2.の証明より,先手が 1×3 の長方形の動物を完成できるとき,動物 B が完成している,または石を置くと動物 B が完成するマスが 2 マス以上存在する状態になっている.また,動物 B を完成できないようにするには,後手が先手の石の上に石を置き続けるしかないが,このとき動物 A が完成する.よって, $[A, B]$ は勝ち型である.

(ii) $[A, C]$ のとき,以下の 3 つの場合に分類できる.

- ① 後手が最初に $(0, 2)$ に石を置くと,先手が次に $(1, 1)$ に石を置くと,後手は A, C を先手が完成させるのを阻止するために, $(2, 1)$ に石を置く必要がある.それ以降,先手はもう 1 つ石を置けば A, C を完成させることができる状態が続くので,先手の 3 ターン目以降の石を置く場所は順に $(-1, 1), (1, 2), (-1, 2), (1, 3), (-1, 3), (0, 3)$, 後手が先手の勝利を阻止するために石を置く必要がある場所は 3 ターン目以降,順に $(-2, 1), (2, 2), (-2, 2), (1, 4), (-1, 4)$ となる.このとき,後手はこれ以外の場所に石を置くと先手が勝利するが,先手が $(0, 3)$ に石を置いたとき, $(0, 4), (-2, 3), (2, 3)$ のいずれかのマスに先手が石を置けば動物 A, C のどちらかが完成するようになってしまうので,この場合,先手必勝となる.
- ② 後手が最初に先手の石の横に石を置くと,先手が最初に置いた石の横に石を置くのが最適な行動となる.先手が 2 ターン目に置いた石の横に後手が石を置いた場合,先手は今まで置いた石の上に 2 つ石を置くことで,動物 C を完成させることができる.先手が 2 ターン目に置いた石の上に後手が石を置いたとき,先手は①と同様の手順で勝利できる.先手が最初に置いた石の上に,後手が 2 ターン目に石を置くと,先手は 2 ターン目に置いた石の横と,3 ターン目に置いた石の上に石を置くことで,動物 C を完成させることができる.

よって $[A, C]$ は勝ち型である.

(iii) $[A, D], [A, E]$ のとき, 後手の行動を以下のように行う.ただし, $q \in \mathbb{N}$ とする.

- ① 先手の石が $(\pm(3q-2), 1)$ に置かれたとき,後手は $(\pm(3q-1), 1)$ に石を置く.
- ② 先手の石が $(\pm(3q-2), 1)$ 以外の場所に置かれたとき,後手は先手が置いた石の上に石を置く.

この操作を繰り返すと,先手は細胞数が 4 の動物を B, C の 2 種類しか作ることができないため, $[A, D], [A, E]$ は負け型となる.後手の行動は図 6 と同様となる.

3 参考文献

[1] ディプタラマ 成澤和志 篠原歩, 2013, 「一般化三並べの拡張: 一手 p 石」, pp. 1-8,
https://ipsj.ixsq.nii.ac.jp/ej/?action=repository_action_common_download&item_id=95807&item_no=1&attribute_id=1&file_no=1