数の世界　～完全数編～

定義 1 n を自然数とする. n の正の約数の総和が $2n$ となるとき, n を完全数 ***(perfect number)*** という.

完全数は自然数の中でも特別な数であり, 約数の総和が自分自身のちょうど 2 倍となる数のことをいいます. 名称は古代ギリシャの数学者, 哲学者であるピタゴラス ($\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma\acute{o}\varrho\alpha\varsigma$, 紀元前 582 年～紀元前 496 年) が付けたといわれています. 完全数を小さい方から書き並べていくと,

$$6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128, \cdots\cdots$$

となっています. 実際に少しチェックをしてみましょう.

- 6 の約数は, 1, 2, 3, 6 です. 約数の総和は $1+2+3+6=12$ となり 6 のちょうど 2 倍となっています.
- 28 の約数は, 1, 2, 4, 7, 14, 28 です. 約数の総和は $1+2+4+7+14+28=56$ となり 28 のちょうど 2 倍となっています.
- 496 の約数は, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496 です. 約数の総和は $1+2+4+8+16+31+62+124+248+496=992$ となり 496 のちょうど 2 倍となっています.

さて, 上でチェックをした完全数ですが, 約数を見てあることに気が付きませんか. 1 が必ずあるのは当たり前として小さい方から見ていくと, 1 も 2^0 と考えれば 2^n の形をした数が並んでいますよね. では, その 2^n が終わった次の数はどんな特徴があるでしょう. 3, 7, 31 となっていますが, 見覚えがありませんか. そうです. 前回のお話に出てきたメルセンヌ数になっているのです. しかも, 注意深く見るとメルセンヌ素数になっていることがわかりますよね. 実は, 完全数に対して次の定理が成り立ちます.

定理 1 (ユークリッド) 2^n-1 が素数ならば, $2^{n-1}(2^n-1)$ は完全数である.

このことから, メルセンヌ素数が見つかると完全数も見つかるということがわかります。また完全数を眺めてみてください. 偶数しか出ていませんよね. 実は, 奇数の完全数が存在するかは未解決問題となっています. では, 偶数の完全数はどうでしょうか. 次の定理を見てください.

定理 2 (オイラー) 偶数の完全数は, $2^{n-1}(2^n-1)$ (ただし, 2^n-1 は素数) の形しか存在しない.

つまり, 偶数の完全数はメルセンヌ素数と同じだけしかないことがわかっているのですが, 前回紹介したように, メルセンヌ素数は無限にあるかわかっていません. そのため, 偶数の完全数が無限に存在するかは未解決問題となっています. まだ, 完全数のお話は続きます. では, また来週 !!