数の世界　～完全数編 その 2 ～

定義 1 n を自然数とする. n の正の約数の総和が $2n$ となるとき, n を**完全数** ***(perfect number)*** という.

完全数を小さい方から書き並べていくと,

$$6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128, \cdots\cdots$$

となっています.

前回は, 偶数の完全数はメルセンヌ素数と関連していること, および, 奇数の完全数については存在するか知られていないことを話しました. 今回は, 偶数の完全数をもう少し見ていくことと, 拡張した話をしたいと思います. まず, 次の式を見てください.

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$496 = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 29 + 30 + 31$$

$$8128 = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 125 + 126 + 127$$

このように, 偶数の完全数は 1 からの連続する自然数の和として表せることが知られています. どこまで足すのかに注目するとあることに気が付きますよね. さらに, 次のような式も存在します.

$$28 = 1^3 + 3^3$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$$

6 以外の偶数の自然数は 1 から連続する奇数の立方数の和として表せることが知られています. これも, 最後の数字に注目すると規則が見えますよね. 偶数の完全数がこのように表現できるのは, 前回紹介したユークリッドとオイラーの結果によるものなのですが, こんなに美しいのは不思議ですよね. ぜひ, それぞれ実際に計算してみてください. では, 完全数を拡張していきたいと思います. 皆さんなら, どのように拡張していきますか. 少し考えてみてください.

チクタクチクタク… さて, どんなことを思いついたでしょうか. 完全数の定義の中で変えやすそうなものは,

- 2 倍ではなく他の倍数になる
- 約数の総和ではなく部分的に足してみる

などではないでしょうか. まず, 2 倍を変えてみましょう.

定義 2 n, k を自然数とする. n の正の約数の総和が kn となるとき, n を**倍積完全数** ***(multiply perfect number)*** または k **倍完全数**という.

$k = 1$ のときは 1 しか存在しません. $k = 2$ のときが, 今まで話してきた完全数に対応します. それでは, $k = 3$ のときはどうでしょうか. 120 の約数を足し合わせてみます.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20 + 24 + 30 + 40 + 60 + 120 = 360$$

このように, 120 の約数の総和は 360 となり, きれいに 3 倍となります. 3 倍完全数は 120, 672, 523776 などが知られています. $k = 4$ のときは 30240, 32760 などが知られています. さて, k がいくつのときまで見つかっているかというと, $k = 11$ まで倍積完全数の存在が確認されています.

次に, 約数の総和の方を変更してみたいのですが, これはこれでたくさん話題があるので次回以降にしたいと思います. では, また来週 !!