

掛谷問題 ～ その 3 ～

問題 1 (掛谷問題) 長さ 1 の線分を 1 回転することのできる領域で、面積最小のものは何か。

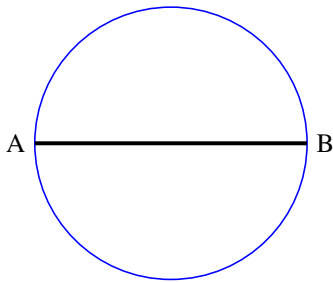


図 1

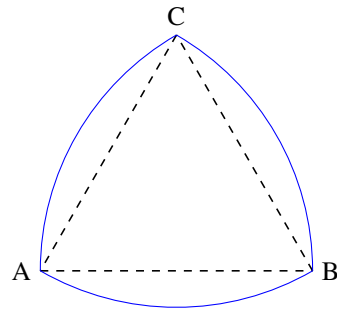


図 2

前回、候補として上の 2 つの図形をあげましたがどれくらいの領域なのかを計算しておきましょう。図 1 の直径を 1 とする円は面積が $\frac{\pi}{4}$ ($= 0.785\dots$)、図 2 の図形では面積が $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$ ($= 0.704\dots$) となっており、図 2 の方が小さい領域であることが確かめられます。 $\sqrt{3}$ は 2 乗して 3 になる正の数で約 1.732 です (中 1 の皆さんは 2 年生になったときに勉強します)。ちなみに、図 2 はルーローの三角形と呼ばれており、数学では、定幅図形 (どこで測っても幅が一定の図形) として、また、正方形の中で辺に接しながら回転することでも有名です。このような性質を利用して、工学ではロータリーエンジンや、掃除ロボットの形として使われています。では、これが面積最小かというもっと小さい図形が発見されます。その 1 の引用にも出てきた藤原松三郎によって、高さ 1 の正三角形であれば線分を 1 回転させられ、かつ、面積がもっと小さくなるのがすぐに示されました。どのように動かすかは下の図を見てください。

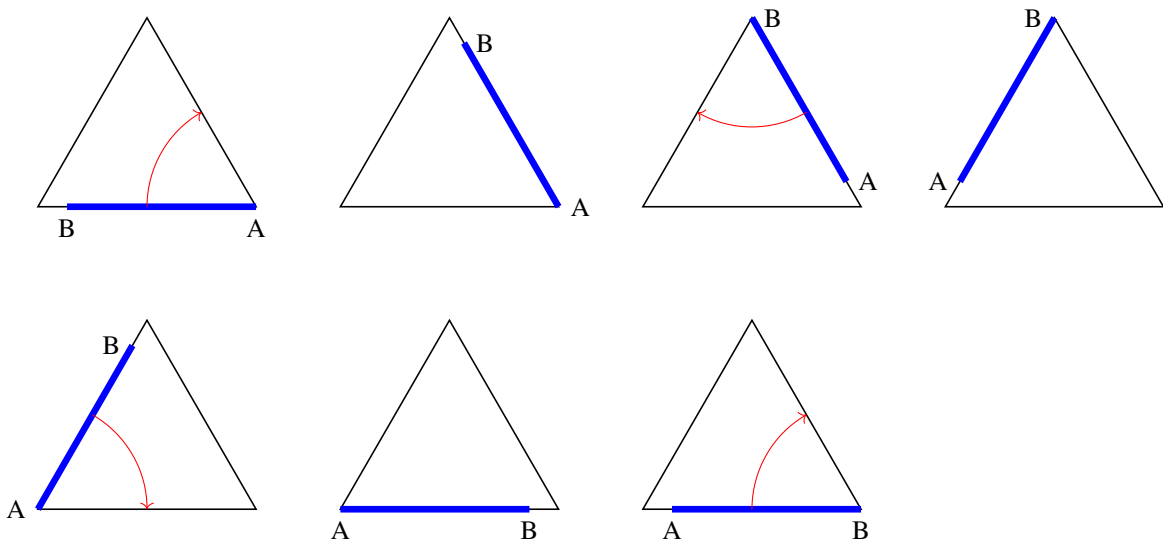


図 3

このように移動させながら回転させると、ちょうど線分 AB が半回転したのがわかりますか。この操作をもう一度繰り返せば、線分 AB は 1 回転することになります。辺上で滑らせるのがいいアイデアですね。ちなみに面積は $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (= 0.577...) となります。しかし、まだまだ小さいものが見つかっていきます。それでは、また来週 !!