

掛谷問題 ～ その 4 ～

問題 1 (掛谷問題) 長さ 1 の線分を 1 回転することのできる領域で、面積最小のものは何か。

前回まで見てきたように、掛谷がルーローの三角形、藤原が高さ 1 の正三角形を提示したのに対し、二人の同僚である窪田忠彦 (数学者、東北帝国大学教授) は新しい図形を発見しました。

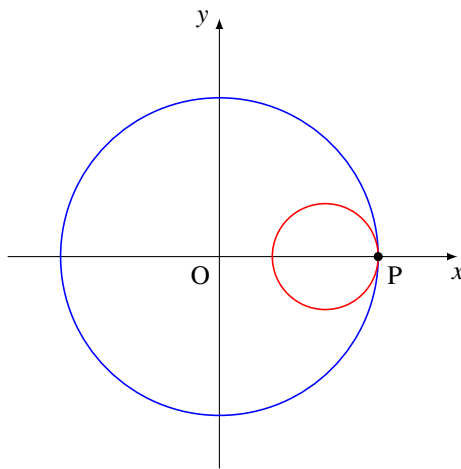


図 1

この図 1 は、青い円と赤い円が内接 (内部で接している状態) しており、青い円と赤い円の半径比率は 3 : 1 となっています。また、点 P は赤い円の円周上にあり、固定されています。赤い円が青い円に内接しながらすべることなく転がっていくとき、P が描く軌跡 (P の動いたあと) がどうなるかを考えると次の黒い曲線になります。

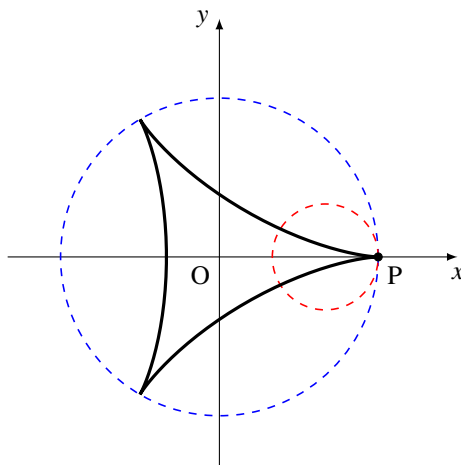


図 2

この曲線はデルトイド (deltoid, 三芒形) と呼ばれています。もしかしたら皆さんの中には、歯車を入れてくるくる回しながらかくと花びらのような図がかける定規を知っている人がいるかもしれません。デルトイドはそれの特殊なとき (半径比率 3 : 1 のとき) になっています。この曲線は、「接線をひくと、曲線によりはさまれている部分の長さは一定

である」という性質をもっています。この性質からデルトイドの内部で、一定の長さの線分をデルトイドに接するよう
にしながら 1 回転できることがわかります。具体的にいうと、青い円の半径が $\frac{3}{4}$, 赤い円の半径が $\frac{1}{4}$ でデルトイドをか
くと、その領域内で長さ 1 の線分を 1 回転させることができます。このとき面積は、 $\frac{\pi}{8}$ ($= 0.392\dots$) となり、今まで出
てきた図形よりももっと小さくなっています。では、これが最小かというはまだまだなのです!! 来週、この問題にけり
をつけたいと思います。それでは、また来週!!