掛谷問題　～その 5 ～

問題 1 (掛谷問題) 長さ 1 の線分を 1 回転することのできる領域で, 面積最小のものは何か.

前回まで, 掛谷がルーローの三角形, 藤原が高さ 1 の正三角形, 窪田がデルトイドを発見したことを見てきました. 同じ縮尺で並べたものが下の図です.

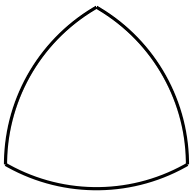

図 1　ルーローの三角形

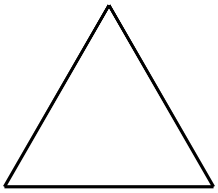

図 2　高さ 1 の正三角形

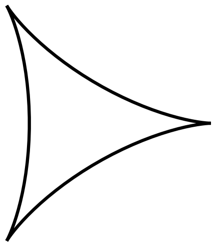

図 3　デルトイド

ここで, 「図形が凸である」という用語を 1 つ定義します. 図形の周上および内部の任意の 2 点を結ぶ線分が図形に含まれるとき, 図形は凸であるといいます. 簡単に言えば, へこんでいない図形のことです. この観点から見ると, 掛谷のルーローの三角形, 藤原の高さ 1 の正三角形は凸な図形, 窪田のデルトイドは凸でない図形となります. 掛谷問題が考えられた 1916 年の 5 年後である 1921 年に, ハンガリー, デンマークの数学者である Gyula Pál が次の定理を証明しました.

定理 1 (G. Pál, 1921) 図形を凸であるものに限るならば, 掛谷問題の解は高さ 1 の正三角形である.

つまり, へこみがない領域であれば藤原が見つけた高さ 1 の正三角形が, 長さ 1 の線分を 1 回転させることのできる最小の面積をもつ図形であるということです. 凸な図形についてはこれで解決したのですが, 窪田が見つけたデルトイドのように凸でない図形についてはもっと小さくなりそうです. 凸であるという条件を外したときについては, 1928 年にロシアの数学者である A. S. Besicovitch によって解決されました.

定理 2 (A. S. Besicovitch, 1928) 長さ 1 の線分を 1 回転することのできる領域は, いくらでも小さくすることができる.

・・・・・・えっ！？

そうなんです. 驚くことに, いくらでも面積の小さい図形が存在するということが結論として出てきたのです. どんな図形なのか気になりますよね. では, 解決した Besicovitch の名前が付けられた掛谷問題の解である Besicovitch 集合を見てみましょう.

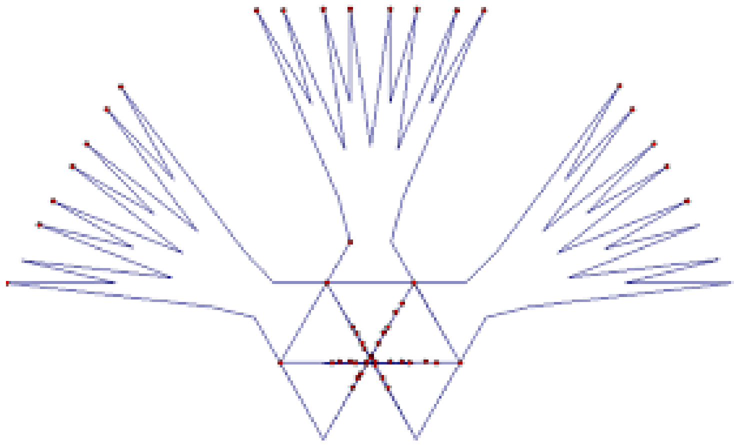

図 4　Besicovitch 集合

図はインターネットでとってきたものなので, 線が荒くなってしまってすみません. Besicovitch 集合は, このようなトゲトゲの図形で, この図には枝分かれしている先端の点から直線が出ている図形になっています. そもそも, どのような構造になっているのかを, 次の図をもとに話していきたいと思います.

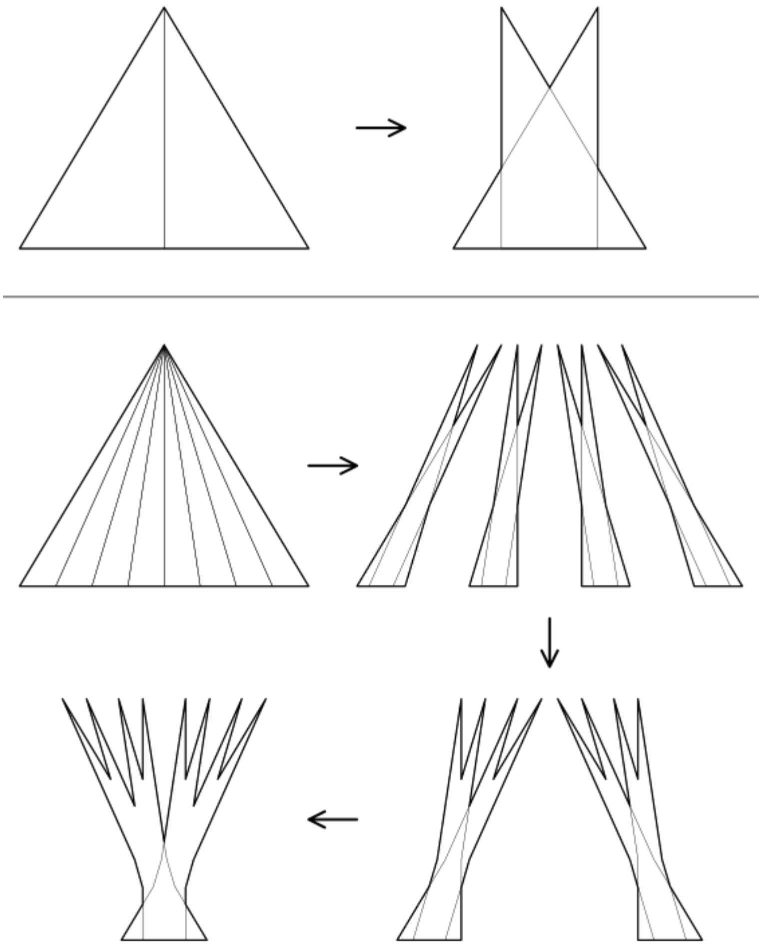

図 5　Besicovitch 集合の元であるペロンの木の作り方

Besicovitch 集合の元となるのはペロンの木といわれる構造です. ペロンの木は, 藤原の見つけた高さ 1 の正三角形を元にして作られます. まず, 高さ 1 の正三角形の底辺を 2^n 等分し, 2^n 個の三角形に分割します. 次に分割した三角形を左から $1, 2, \cdots, 2^n$ と番号を付けたとき, $2n-1$ 番目と $2n$ 番目の三角形を重ねます. このようにしてできた 2^{n-1} 個のパーツを重ねていき一つにまとめたものがペロンの木といわれる図形です (図 5 の上は 2 等分の例, 下は 8 等分の例

です). そして, このペロンの木を向きを変えて張り合わせたものが, Besicovitch 集合となります.

実は, 図 4 の Besicovitch 集合には足りないところがあり, それはトゲトゲの頂点から直線がでている部分がカットされています. では, この図形の中でどのように線分を 1 回転させるのかが問題となるのですが, 言葉で説明をするのはとても困難なので, Youtube で ” kakeya needle problem ” と検索をしてみてください. 動画で長さ 1 の線分をどのように動かせばよいか見ることができます. このように Besicovitch 集合を構成するには, ペロンの木を張り合わせることになりますが, 2^n 等分の n を限りなく大きくしていくと面積がいくらでも小さくできることが証明されているため, 掛谷問題の解はいくらでも小さくすることができるとなります.

どうでしたでしょうか. 面積が 0 に近づくのに長さ 1 の線分を 1 回転できるのは不思議ですよね. それでは, また来週 !!