平面充填　～その 3 ～

定義 1 平面を有限種類の平面図形を用いて, 重なることなく, かつ, 隙間なく敷き詰めることを**平面充填 *(tiling, tessellation)*** という.

平面充填問題の歴史を見ていきましょう. その 1 に書いたように, ピタゴラス (Πυθαγόρας, 紀元前 582 年～紀元前 496 年) によって, 正多角形で平面充填可能な図形は, 正三角形, 正方形, 正六角形の 3 種類のみであることが証明されました. 前回, その 2 では, 任意の三角形, 四角形, および, 平行六辺形も平面充填可能であること見てきました. それでは, 五角形以上ではどうなるのでしょうか. これでは, 条件がゆるすぎるので図形を凸な図形 (内角がすべて 180° 未満の図形) に絞って考えていきたいと思います.

まず, 凸七角形以上では平面充填が不可能なことが, 1927 年にラインハルト (K. A. Reinhardt, 1895～1941, ドイツの数学者) によって証明されています. ラインハルトは, ヒルベルトの 23 の問題の第 18 問題の解決者としても知られています. 六角形では前回見たように, 凸という条件を付けても平行六辺形のような平面充填可能な図形が存在します. 1918 年に, これもラインハルトによって証明され, 3 つのタイプしか存在しないことが知られています.

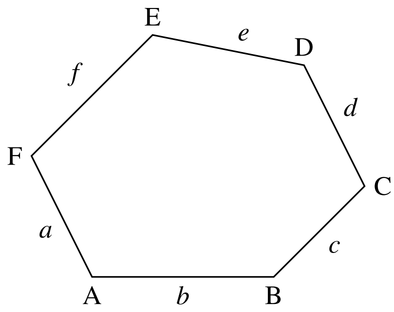

図 1　凸六角形

図 1 の小文字は辺の名前を表しています. 凸六角形で平面充填可能な 3 つのタイプの辺や角の条件は以下のようになっています.

1. $b = e, \quad \angle B + \angle C + \angle D = 360°$
2. $b = e, \quad d = f, \quad \angle B + \angle C + \angle E = 360°$
3. $a = f, \quad b = c, \quad d = e, \quad \angle B = \angle C = \angle D = 120°$

どのように充填するのかについては, Hexagonal tiling などで検索をすると出てきます. 英語版の Wikipedia では, 皆さんが 1 学期に勉強した文様群についても触れられており, 敷き詰め方がどのパターンになるかも書かれています. 復習もかねて, ぜひ検索してくださいね. 凸五角形の世界が残っていますが, 長い話になるので次回以降にしましょう.