

# ポアンカレ予想

今回は、ミレニアム問題の中で唯一、解決されたポアンカレ予想について話していきたいと思います。難しい用語が出てきますが、意味が分からなくても数学の歴史の雰囲気を楽しんでもらえればと思います。前回も載せましたが、ポアンカレ予想とは以下のような予想です。

**ポアンカレ予想 (Poincaré conjecture)** 単連結な 3 次元閉多様体は 3 次元球面  $S^3$  と同相である。

ポアンカレ予想は、1904 年にアンリ・ポアンカレ (Jules - Henri Poincaré, 1854~1912, フランス) によって提示された幾何学 (正確には位相幾何学) に関連する予想です。数学では一般化をよく行いますが、この予想も 3 次元から高次元に一般化されていて、次のような問題となります。

**ポアンカレ予想の  $n$  次元 ver.** 単連結な  $n$  次元閉多様体  $M$  が、 $n$  次元球面  $S^n$  とホモトピー同値ならば、 $M$  と  $S^n$  は同相である。

普通の感覚では、高次元の方が想像しにくいので、3 次元が最も簡単に解けると思いがちでしょう。しかし、このポアンカレ予想は高次元の方が先に解決されるという不思議な歴史をたどります (幾何学の世界では、他にも球充填問題 (ケプラー予想) など高次元の方が解かれている問題があります)。 $n = 1, 2$  のときは、古典的な結果であるため  $n \geq 3$  のときが問題となるわけですが、なんと最初に解かれたのは  $n \geq 7$  のときで 1961 年にスティーブン・スメイル (Stephen Smale, 1930~, アメリカ) により肯定的に解決されました (スメイルはその後証明を拡張し  $n \geq 5$  の証明をしています)。その後も立て続けに、 $n = 6$  のときを 1962 年にストーリングスが、 $n = 5$  のときを 1961 年にジーマンが肯定的に解決しました。ちなみに、スメイルはこの業績により 1966 年にフィールズ賞をもらっています。

このように、1960 年代に入った頃に  $n \geq 5$  において次々とポアンカレ予想は解決しましたが、 $n = 3, 4$  は解けませんでした。20 年ほどたって、 $n = 4$  のときは 1982 年にマイケル・フリードマン (Michael Hartley Freedman, 1951~, アメリカ) によって肯定的に解決されます。彼自身の言葉を借りれば、ベットの中にいたときに神のお告げがあり、飛び起きて大急ぎで証明の要点を書きとめたらしいです。ちなみに、フリードマンはこの業績により 1986 年にフィールズ賞をもらっています。

さて、最後に  $n = 3$  のときが残りました。ポアンカレが元々提示した 3 次元での問題が残ってしまったのです。その後、様々なアプローチが試みられましたが解決には至らずに、ミレニアム問題に選出されます。予想から 100 年近くたって解かれずに残っている難問でしたが、2006 年にグリゴリー・ペレルマン (Grigori Yakovlevich Perelman, 1966~, ロシア) によって  $n = 3$  のときが解決されました。ちなみに、ペレルマンもこの業績により 2006 年にフィールズ賞を授与される予定でしたが、本人が受賞を辞退しました。ポアンカレ予想の証明で 3 人ものフィールズメダリストが出ることから、この予想が数学の世界において大きな問題であったことがわかるでしょう。

しかし、なぜ名誉あるフィールズ賞をペレルマンは辞退したのでしょうか。ペレルマンについてのお話は次回にしましょう。では、また来週 !!