abc 予想について　その 2

前々回の "abc 予想について　その 1" の中に, 私からの問題が 3 題出題されていたのですがチャレンジしてみてくれたでしょうか. まずは, その解答解説から始めたいと思います.

問題 1 $a^3 + b^3 + c^3 = 45$ を満たす整数 a, b, c は存在するか

問題 2 $a^3 + b^3 + c^3 = 46$ を満たす整数 a, b, c は存在するか

45 のときの解答の 1 つは $(a, b, c) = (2, -3, 4)$, 46 のときの解答の 1 つは $(a, b, c) = (-2, 3, 3)$ となります. この 2 つの問題は具体的に式を満たす整数の組を見つければよいだけなのですが, 3 乗の数 (数学ではこのような数を**立方数**といいます. 2 乗の数は**平方数**といいます.) をしらみつぶしに計算してくのが大変なため, 前回書いたように 33 および 42 のときは 2019 年に A. Booker によりスーパーコンピューターを使って解かれました. ちなみにどんな値になっているかをのせておきます.

33 のときの解答の 1 つは $(a, b, c) = (8866128975287528, -8778405442862239, -2736111468807040)$

42 のときの解答の 1 つは $(a, b, c) = (-80538738812075974, 80435758145817515, 12602123297335631)$

とてつもない桁数ですね. これはコンピューターを使うのも納得です. もう 1 つは次の問題でした.

問題 3 n を 9 で割ると 4 または 5 余る自然数とする. $a^3 + b^3 + c^3 = n$ を満たす整数 a, b, c が存在しないことを示せ.

どう証明をしてよいか手を付けるのが難しい人も多かったでしょう. このような問題は, 中学 3 年生以降に勉強することになりますが, 今回は簡単にアプローチ方法をお話しします. この問題は, 読み替えると $a^3 + b^3 + c^3$ が 9 で割ったときに余りが 4 または 5 にならないことを示してくださいという問題です. **(これがとても重要なポイントです)**

$a^3 + b^3 + c^3$ は 3 つの立方数の和として表されているため, これを 9 で割ったときの余りを考えることは難しく思えますが, 立方数 1 つだけなら考えることができるのではないでしょうか. 私たちは 9 で割ったらどうなるのかが知りたいので, 立方数を 9 で割ってみましょう. 具体的な数字を用いて実験してみると, 立方数を 9 で割った余りはとても限られた数しか出てこないことがわかりますよね. ここまでくればほぼ終わりです. 1 つの立方数を 9 で割った余りの可能性が分かったので, $a^3 + b^3 + c^3$ の余りの可能性も特定できます. (例えば 9 で割って余り 1 の数 m と, 9 で割って余り 3 の数 n を足した $m + n$ を 9 で割ると余りはいくつになるでしょう?) そうすると, 余り 4 または 5 とならないことが示せるという流れです.

それでは abc 予想についてお話していきましょう. そもそも, abc 予想とはどのようなものかというと, 1985 年に J. Oesterlé と D. Masser によって提示された予想です. そのため Oesterlé - Masser conjecture とも呼ばれています.

予想 1 (abc conjecture) $a+b=c$ を満たす互いに素な自然数の組 (a, b, c) に対し, 積 abc の互いに異なる素因数の積を d と表す. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $c > d^{1+\epsilon}$ を満たす組 (a, b, c) は高々有限個しか存在しない.

予想の中に知らない用語が含まれていて, 何を主張しているのかわからないという人もいるでしょうが, できるだけかみ砕いて解説をしていくのでいつも通りお付き合いください. わからなくても数学の世界の雰囲気だけでも楽しんでもらえればと思います. まずはこの予想の歴史からです. **(学問を学ぶ上では, 過去にどのような経緯があったのか, どこからこの問題が生まれてきたのか, どれくらいに誰がどのように解決したのかを勉強することが非常に大事です. 私の文章を読んでくれている皆さんの中には, 細かく年号や人物名がたくさん出てきていることに気付いている人も多いかと思います. このように皆さんもただ事実を覚えるだけでなく, 歴史的な背景を含めて知識を吸収していくことを心がけましょう.)**

”abc 予想” は, 1981 年に W. W. Stothers が, そのすぐ後に R. C. Mason が証明したメーソン・ストーサーズの定理 (Mason - Stothers theorem) を発端としています. このメーソン・ストーサーズの定理は, ざっくりいうと多項式 (体系数学 1 に用語の説明がのっているので確認してください) といわれる数式の世界において, ある関係が成り立っていることを主張しているものです. この関係と似たようなものが, 数の世界でも成り立つのではないかというのが abc 予想です.

皆さんは今年の 4 月に abc 予想についてのニュースを初めて見た人が多いと思います. 実は 8 年前 (皆さんはまだ 4 歳ぐらいだったと思うのでほとんどの方は覚えていないでしょう) の 2012 年に, 日本人である京都大学数理解析研究所の望月新一教授が abc 予想を証明したと発表したことが大きなニュースになりました. この段階では, 証明が本当に正しいかどうかはわからず, 世界中のその分野の数学者が証明の検証を始めました. このように, 専門家や研究者によって証明, 論文の評価や検証をすることを査読といいます. そして, 2020 年に査読が終わり内容が認められ論文誌に掲載が決まったというのが流れです. 当たり前ですが大事なことは, 個人で問題を解決した, 証明したといっても他の専門家に正しいことを認められ, かつその結果が評価されなければ意味をなさないということです.

この abc 予想はなぜ有名な予想であったかというと, この予想が正しいことが証明されると他の未解決な予想や, 有名な定理が簡単に導かれることがわかったからです. とくに有名なものはフェルマーの最終定理が abc 予想から導かれるというものでしょう. この定理は, n が 3 以上の自然数のとき, $x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないという定理で, abc 予想とは独立に 1995 年にワイルズ (A. J. Wiles) によって証明されました. ワイルズはこの業績により 1998 年にフィールズ賞を特別受賞しています. この定理だけでも様々な数学者のドラマがあり, また, 面白い数学の話があるのですがそれはまたの機会にしましょう. この他にも, モーデル予想など多数の定理や予想につながることが知られています. ちなみに, モーデル予想は 1983 年にファルティングス (G. Faltings) によって証明されたものでモーデル・ファルティングスの定理とも呼ばれています. この業績によりファルティングスは 1986 年にフィールズ賞を受賞しています.

abc 予想についての歴史はこれくらいにしておき, 次回は予想の内容についてお話していきたいと思います. では, また来週 !!