直線アレンジメント　〜その 2 〜

平面上, 一般の位置 (平行線がなくどの 3 本の直線も 1 点で交わらない) に n 本の直線を配置したときにできる領域数を考えてみましょう. いきなり一般的な n 本では考えにくいと思うので, 小さい数から具体的に考えていきます.

図 1　1 本のとき (2 領域)

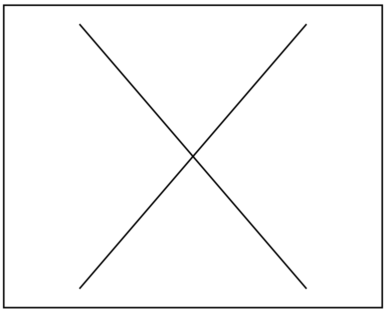

図 2　2 本のとき (4 領域)

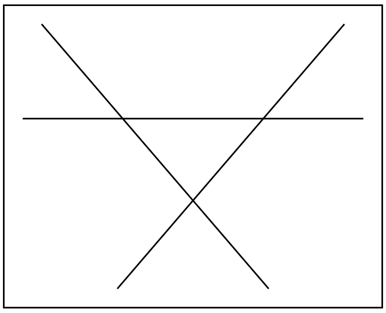

図 3　3 本のとき (7 領域)

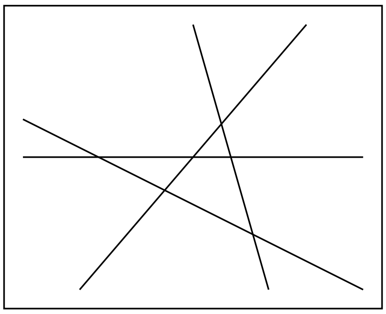

図 4　4 本のとき (11 領域)

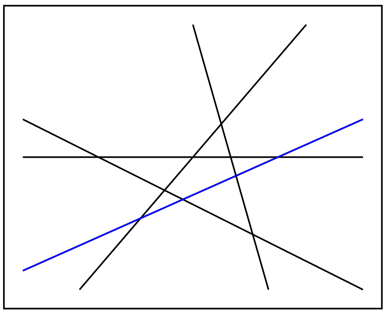

図 5　5 本のとき (16 領域)

このように 1 本から始めて描いていくと, 2 領域, 4 領域, 7 領域, 11 領域, 16 領域と増えていきます. とても強い規則性が見えますよね. n 本の直線を一般の位置に配置したときにできる領域数を $f(n)$ とおくと, 次ような関係が成立することが予想されます.

$$f(n+1) = f(n) + n + 1$$

なぜこのような関係になるのでしょうか. ここでは, 新しく描き加える最後の 1 本に注目してみましょう. 図 5 の青い直線に注目してください. 図 4 からこの青い直線が新しく描き加えられて図 5 となりますが, この直線が領域数に与えた影響を考えます. 直線が引かれることにより, 元々 1 領域であった場所は 2 領域となります. このことから, 新しく引いた直線が何領域を通過するかについて考えればその領域数分増加するので関係式が作れます. 図 5 では青い直線が元々引かれていた 4 本の直線と交わるため, 5 領域を通過していることが確認できるでしょう. そのため 4 本から 5 本になるときには, その 5 領域がそれぞれ 1 領域から 2 領域へ分割されるため合計で 5 領域増えることとなります. これは n 本の時でも同様に考えられ, $n+1$ 本目の直線は, 元々引かれていた n 本と交わるため $n+1$ 領域を通過します. そのため新たに $n+1$ 領域が増加するので, 先程の関係式が成立します.

この考え方がわかると, なぜ 4 つの集合のベン図が円では表現できないかが理解できるようになります. この話はまた今度することにしましょう.