

コラッツ予想 ～有名な未解決問題～

現在、高校2年生のSSHの数学課題研究で、コラッツ予想に関連するテーマを研究している生徒がいます。コラッツ予想とは、小学生でも理解できる内容でありながら、未だに証明がされていない数学の有名な未解決問題です。そこで、今回はコラッツ予想についてお話をしていきたいと思います。コラッツ予想とは次の問題のことをいいます。

予想1(コラッツ予想) ある自然数に対して、偶数であれば2で割る、奇数であれば3倍して1を足すという操作を繰り返し行ったとき、どのような自然数から始めても、 $4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ というループにたどり着く。

実際に具体的な数で実験をしてみましょう。例えば、最初に13を選んだとすると、

$$13 \Rightarrow 40 \Rightarrow 20 \Rightarrow 10 \Rightarrow 5 \Rightarrow 16 \Rightarrow 8 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$$

となり、この後は $4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ を繰り返すこととなります。ちなみに、赤い部分は奇数への操作、青い部分は偶数への操作を表しています。もう1つ例を見てみましょう。最初に15を選んだとすると、

$$15 \Rightarrow 46 \Rightarrow 23 \Rightarrow 70 \Rightarrow 35 \Rightarrow 106 \Rightarrow 53 \Rightarrow 160 \Rightarrow 80 \Rightarrow 40 \Rightarrow 20 \Rightarrow 10 \Rightarrow 5 \Rightarrow 16 \\ \Rightarrow 8 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$$

となり、先程より回数はかかりますが、やはりこの後は $4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ を繰り返すこととなります。

このように、コラッツ予想はどのような数から始めても操作を繰り返すと、いつかは $4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ というループにたどり着くだろうということが予想されているものです。問題は理解できましたか。コラッツ予想は、コラッツ (Lothar Collatz, 1910 - 1990) が1937年に提唱した問題であり、今まで様々な人がアタックしてきましたが証明も反例も出ていない問題です。

2つしか例を出していませんが、最初の数字により $4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ というループにたどり着くまでの回数にはばらつきがあるのを見て取れます。13は9回で1にたどり着くのに対して、2大きいだけの15は17回でやっと1にたどり着きます。また、増えたり減ったりしながら最終的に $4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ というループにたどり着くようですが、途中でどれくらい大きな数が出てくるのかもわかりません。13からであれば途中の最大の数は40ですが、15からだとも160にもなります。また、類似問題もたくさん考えられており、ルール(偶数であれば2で割る、奇数であれば3倍して1を足す)を少しアレンジするだけで違う挙動を示し、全然別の問題になってしまうことも知られています。このように、コラッツ問題は様々なことがわかっていません。興味がある人はぜひ調べてみてください。ただ、証明ができなくても悲観する必要はありません。数学者が80年くらいかけてもいまだに解決してないのですから。では、また!!