数の世界　～素数編 3～

まず, 前回の復習として双子素数, いとこ素数, セクシー素数の定義です.

定義 1 p, $p+2$ が共に素数であるとき, この 2 つの素数を**双子素数 (twin prime)** という. p, $p+4$ が共に素数であるとき, この 2 つの素数を**いとこ素数 (cousin prime)** という. p, $p+6$ が共に素数であるとき, この 2 つの素数を**セクシー素数 (sexy prime)** という.

これらは 2 つの素数の組ですが, 3 つ以上にしていくとどうなるか見ていきましょう. 双子素数は差が 2 のペアなので, それをトリオにすることを考えてみます.

問題 1 p, $p+2$, $p+4$ がすべて素数となる p を求めよ.

どうでしょうか. すぐに 3, 5, 7 は見つかると思いますが, 他の組合せは見つけられますか. 実は, p, $p+2$, $p+4$ のタイプは 3, 5, 7 しかないことが知られています. 証明はすごくシンプルなのでぜひ挑戦をしてみてください. 具体的に数字を p にあてはめて考えるとある特徴に気づくはずです. このように双子素数で個数を増やそうとすると 1 通りに決まってしまうので少しだけずらします.

定義 2 p, $p+2$, $p+6$ がすべて素数, または, p, $p+4$, $p+6$ がすべて素数であるとき, この 3 つの素数を**三つ子素数 (prime triplet)** という.

このようにトリオを定義しておくと 1 つには決まりません. 例えば, (5, 7, 11), (7, 11, 13) などが現れます. そうすると, いったいどれくらいあるのかが問題になりますが, 双子素数と同様に未解決問題になっています. ここで, さらに増やしてみたらどうなるのか考えたくなりますよね.

定義 3 p, $p+2$, $p+6$, $p+8$ がすべて素数であるとき, この 4 つの素数を**四つ子素数 (prime quadruplet)** という.

他にも五つ子素数, 六つ子素数が定義されています. これらも無限にあるかわかっていない未解決問題です. わからないことだらけですね. 今度は, いとこ素数で増やしたらどうなるか考えてみたくなりますよね.

問題 2 p, $p+4$, $p+8$ がすべて素数となる p を求めよ.

どうでしょうか. 3, 7, 11 以外に見つかりますか. 双子素数のときと同様に, この形しかないことが知られています. 証明は双子素数のときと同じなのでチャレンジしてみてください. では, セクシー素数も同じかというとそうではありません. p, $p+6$, $p+12$ がすべて素数となるものを考えると, (7, 13, 19), (17, 23, 29) などが現れます. これも無限にあるかわかっていません. それでは, 増やしていきましょう. p, $p+6$, $p+12$, $p+18$ がすべて素数となるものは

(5, 11, 17, 23), (41, 47, 53, 59) などが現れ, これも無限にあるかわかっていません. もっと増やして, p, $p+6$, $p+12$, $p+18$, $p+24$ がすべて素数になるものはどうでしょう. なんと (5, 11, 17, 23, 29) しかないことが知られています. 6 個以上つなげると存在しないこともすぐにわかるはずです. 証明はお任せします.

素数のトリオなどについて見てきましたが, ほとんどが未解決問題ですね. 本当に少しだけ変えただけで, 1 通りしかなかったり, そもそもわからなかったりと数学の世界は不思議です. ぜひ, 周辺の話を調べてみてください. では, また来週 !!