数の世界　～フェルマー数編～

前回まで素数のペアやトリオなどを見てきましたが, 今回は素数にも関係するフェルマー数のお話をしていきます.

定義 1 n が 0 以上の整数のとき, $2^{2^n}+1$ をフェルマー数 ***(Fermat number)*** といい, F_n で表す. 特に, 素数であるフェルマー数のことをフェルマー素数 ***(Fermat prime)*** という.

2 の 2 の n 乗の形をしている自然数をフェルマー数といいます. 最初の方から書き並べていくと,

3, 5, 17, 257, 65537, 4294967297, 18446744073709551617, ······

となっています. ただし, $n=0$ のときは $2^0=1$ と計算しています. このようなタイプの数がなぜフェルマー数と呼ばれるかというと, フランスのピエール・ド・フェルマー (Pierre de Fermat, 1607～1665) が $2^{2^n}+1$ は 0 以上の整数を代入したときに, 常に素数を生成する式であると主張したことからきています.

実際に素数であるかをチェックしてみると, F_0 から F_3 である 3, 5, 17, 257 であれば, 素数であることが確認できるでしょう. しかし, 次の F_4 である 65537 からは桁がどんどん大きくなってくるので, 実際に割って素数かどうかをチェックすることが大変になってきます. とはいっても, 65537 ですから 256 までの素数で順に割り切れるかを地道に試していけば, 65537 が素数であることはチェックできます (なぜ, 256 までなのかは考えてみてください.). フェルマーの時代では, 見てきたように F_0 から F_4 までは素数であることが確認されていました. しかし, 次の F_5 である 4294967297 からは, 素数であるかどうか知られていませんでした. そこに登場したのが, スイスの有名な数学者であるレオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707～1783) です. 1732 年にオイラーは F_5 が素数でないことを証明しました. 実際に F_5 は, 次のように因数分解できます.

$$4294967297 = 641 \times 6700417$$

オイラーは地道に割ったのではなく, フェルマー数のもつ性質を研究し, それに基づいて 641 を素数にもつことを発見しました. こうなると F_6 以降に素数があるのかが問題となりますが, これは未解決問題で, 現在も F_5 以降で素数となるものが存在するかは知られていませんし, ないとも証明されていません. さらに, フェルマー数の中に合成数 (素数ではない自然数) が無限に存在するかも未解決問題となっています.

中 1 の皆さんは 1 学期に作図を勉強しますが, 定規とコンパスで正多角形を作図しなさいと言われたら, 皆さんは正何角形を描くことができますか. 実は, すべての正多角形を定規, コンパスで描くことができるわけではありません. なんとここにフェルマー素数が関係してきます. しかも, 最初に関連性を見つけ出したのは, ドイツの有名な数学者であるフリードリヒ・ガウス (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777～1855) でした.

定理 1 (Gauss - Wantzel theorem, 1837) 正 n 角形が作図可能である必要十分条件は, $n=2^m \cdot F_a \cdot F_b \cdot F_c \cdots$ と表されるときである. ただし, m は 0 以上の整数, $F_a, F_b, F_c, \cdots$ は相異なるフェルマー素数である.

つまり, 正 17 角形や正 257 角形などは定規とコンパスだけで描けるということがわかったのです. とても不思議ですね. 興味があれば作図の手順を調べて描いてみませんか. では, また来週 !!