

無限級数の世界 ～ その 1 ～

3 学期が始まりましたね. 今学期の数学のお話は無限級数のお話から始めたいと思います. タイトルに入っている無限級数という用語ですが, ざっくりいうと数や式の無限個の和の式のことをいいます. 有限個の和 (何個足すか決まっている) の式であれば地道に計算することで結果を求めることができますが, 無限に足さなければいけないときに結果がどうなるかということを考えるのが, 無限級数の和を求める問題となります.

しかし, 無限個の数や式の和を考えるということは, 無限回の足し算をすることになるため結果が決まらなそうですね. 計算に終わりがないため計算結果は常に変動してしまいます. では, そもそも無限級数の和 (計算結果) というものをどのように定義するのでしょうか. 数学ではどんどん足していったときにある値 α に限りなく近づくとき, α を無限級数の和として定義します. もし, いくらでも大きくなってしまえば ∞ (正の無限大) とし, 逆にいくらでも小さくなってしまえば $-\infty$ (負の無限大) とします. また, これらのどれでもない場合に関しては振動すると定義します. 以下に $\infty, -\infty$ となる例をのせておきます.

$$\bullet 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$$

$$\bullet -1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - \dots = -\infty$$

あれっ? 2 番目の式は引き算をつかっていますがいいのでしょうか. 無限級数は和の式だったはずですが. ここは, 次のようにとらえてください.

$$\bullet (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + (-1) + \dots = -\infty$$

a を引くということは, 言い換えると $-a$ を足すということです. そのため, 式の中に引き算が入っていても無限級数といえます. では, 次の無限級数の和はどうなるのでしょうか. 少し考えてみてください.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

どうでしょうか. 1 つ目まで計算したとき, 2 つ目まで計算したとき, 3 つ目まで計算したとき, というように前から順に計算していった結果を書いてみると,

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

というように, 1 と 0 が交互に出てきますが, いくらでも大きくなっていくわけでもなく, また, いくらでも小さくなっていくわけでもなく, さらに, ある値 α に限りなく近づいていくわけでもありません. このことから, この無限級数の和は振動することがわかります. 実際, 1 と 0 を振動しているように見えますよね. ちなみにこの級数は有名な級数の 1 つでボルツァーノ級数と呼ばれています. なぜ有名なのかについては次回にさせていただきます. 不思議なことが起こりますよ. では, また来週 !!