

無限級数の世界 ～ その 2 ～

ボルツァーノ級数とは次のような級数でした。

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

1 と -1 が交互に出てくる級数ですが、この計算がある値 α に限りなく近づくこともなく、正の無限大や負の無限大になることもなく、振動することは前回のお話を読んでもらえればと思います。今回は、この級数にまつわる不思議なお話です。では、始まり始まり。

ある人は、ボルツァーノ級数を見たときに次のように考えました。

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= 0 \end{aligned}$$

「1 と -1 をセットにしていけば 0 がずっと出てくるから、いくら足しても 0 になるんだ。」と言い張ります。しかし、そこに現れた別の人が「残念だなあ。その考え方は間違っているよ。」といてきました。

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + \dots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

「最初の 1 はセットにはいけないんだよ。最初は取っておいて、次から -1 と 1 をセットにするんだ。そうすれば、1 に 0 をいくら足しても 1 のままだろう。」 2 人は自分の方があっていると言い張ります。「なんで最初の 1 を取っておくんだ。仲間外れでかわいそうじゃないか。」 「いや、そんなことはない。逆に先頭を絶対にセットに入れないといけないなんてルールはない。」 …… 自分が正しいと言い合っているとき、さらに別の人が来ました。うまく仲裁してくれるでしょう。

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots &= (1 - 1) + (1 - 1) + 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + \dots \\ &= 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

「何も最初を取っておかなくていいんだよ。例えば、5 番目を取っておいたら 1 になるよ。計算ってどんなふうにしても同じ答えになるはずだろう。だから、最初からセットにするときだけがイレギュラーで 0 になっちゃうから無視してで 1 なんじゃないの。」 「イレギュラーとはなんだ !! どこでもセットから仲間はずれにするのはダメだろう !!」 「だってこれ以外は 1 になるだろう。多数決で 1 でいいじゃないか !!」

ただただ、火に油を注ぐ結果となっただけでした。そこに現れるまた別の人。今度こそ仲裁をしてくれるでしょう。「君たちは答えを知りたいんだろう。数学で勉強したじゃないか。知りたい答えを x とおくんだよ。

$$x = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

とする。そうしたら、

$$\begin{aligned} 1 - x &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \end{aligned}$$

となるだろう. x と今作った $1-x$ をよく見てごらん. 右辺が同じだろう. ということは,

$$\begin{aligned}x &= 1-x \\2x &= 1 \\x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ほら, 答えがわかったじゃないか. $\frac{1}{2}$ なんだよ.」……

今まで言い合っていた3人は思いました. 1と-1を足しているだけなのに分数になるなんて…, ヤバい人がきてしまった!! (終わり)

不思議ですよ. では, また来週!!