無限級数の世界　～ その 3 ～

前回見たように, ボルツァーノ級数に対して様々な計算をすると結果がいろいろ現れてしまいます.

(a)
$$\begin{aligned}1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots \\ &= 0+0+0+0+0+\cdots\cdots \\ &= 0\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+\cdots\cdots \\ &= 1+0+0+0+0+\cdots\cdots \\ &= 1\end{aligned}$$

(c) $x = 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots$ とおくと

$$\begin{aligned}1-x &= 1-(1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots) \\ &= 1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-\cdots\cdots\end{aligned}$$

よって,

$$x = 1-x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

これが意味していることは, 無限級数に関して計算順序をかえると, 結果が変わってしまう可能性があるということです. 有限個の項の計算であればどこから計算しても結果は変わりませんが, 無限級数の場合は好きな所から計算してはダメですよ, 左から順序よく計算をしていきましょうということです. 括弧は計算順序を表しているとも言えますが, 括弧の付いている位置が変わると結果が変わってしまうものには次のようなものもあります.

$$\begin{aligned}2+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}\right)-\cdots\cdots &= 2+0+0+0+0+\cdots\cdots \\ &= 2\end{aligned}$$

となりますが,　括弧がずれると

$$\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{6}{5}-\frac{7}{6}\right)+\cdots\cdots = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots\cdots$$

となるので, 左から 1 項目まで, 2 項目まで, 3 項目までと和を求めていくと, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\cdots\cdots$ となり感覚的に 1 に近づいていくことがわかるでしょう.

これまでは, 絶対値が同じになる項が交互に現れている無限級数を見てきましたが次回は,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots$$

単位分数の交代級数 (ニュートン・メルカトル級数) についてお話します. お楽しみに !!